Chapitre III : Ouvertures, Fermetures

Ouvertures et Fermetures par adjonction

Ouvertures et Fermetures algébriques

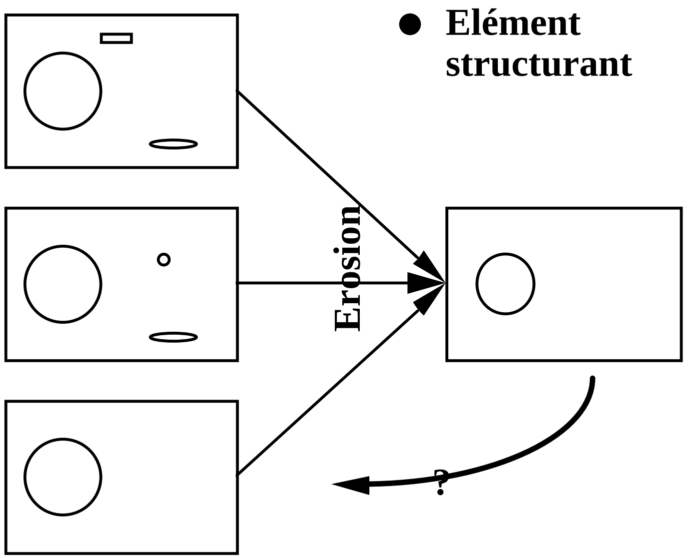
Application : Granulométries

Résidus : Top-Hat

Ouverture et Fermeture par Adjonction

Problème de filtrage inverse :

- Plusieurs ensembles différents peuvent avoir le même érodé, ou le même dilaté. Néanmoins, entre tous les inverses possibles, il en existe un plus petit. On l'obtient en composant l'érosion par la dilatation adjointe.



Il se nomme ***ouverture par adjonction***, que l'on note

$\gamma_B = \delta_B \varepsilon_B$ *(cas général)*

$\mathbf{XoB = [(X \ominus B) \oplus B]}$ (τ-*opérateurs)*

En intervertissant les facteurs δ_B et ε_B on obtient la ***fermeture par adjonction***

$\varphi_B = \varepsilon_B \delta_B$ *(cas général),*

$X \bullet B = [X \oplus B) \ominus B]$ (τ-*opérateurs).*

(*Ces opérations, dues à G. Matheron, sont parfois appelées* ***morphologiques***)

Propriétés de l'ouverture par Adjonction

Croissance :

L'ouverture et la fermeture par adjonction sont croissantes comme produits d'opérations croissantes.

(Anti-)extensivité :

En faisant $Y = \delta_B(X)$, puis $X = \varepsilon_B(Y)$ dans l' adjonction $\delta_B(X) \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq \varepsilon_B(Y)$ on voit que :

$\boxed{\delta_B \varepsilon_B (X) \subseteq X \subseteq \varepsilon_B \delta_B (X)}$ d'où $\varepsilon_B (\delta_B \varepsilon_B) \subseteq \varepsilon_B \subseteq (\varepsilon_B \delta_B)\varepsilon_B \Rightarrow \boxed{\varepsilon_B \delta_B \varepsilon_B = \varepsilon_B}$

Idempotence :

L'érodé de l'ouvert d'un ensemble est égal à l'érodé de cet ensemble. Il en résulte L'idempotence de γ_B et de φ_B :

$\varepsilon_B (\delta_B \varepsilon_B) = \varepsilon_B \Rightarrow \delta_B \varepsilon_B (\delta_B \varepsilon_B) = \delta_B \varepsilon_B$ $\boxed{\gamma_B \gamma_B = \gamma_B \text{ , ainsi que } \varphi_B \varphi_B = \varphi_B}$

Enfin, si $\varepsilon_B(Y) = \varepsilon_B(X)$, alors $\gamma_B(X) = \delta_B \varepsilon_B(X) = \delta_B \varepsilon_B(Y) \subseteq Y$. Ainsi, γ_B est le plus petit inverse de l'érosion ε_B .

Effets de l'Ouverture sur les Ensembles

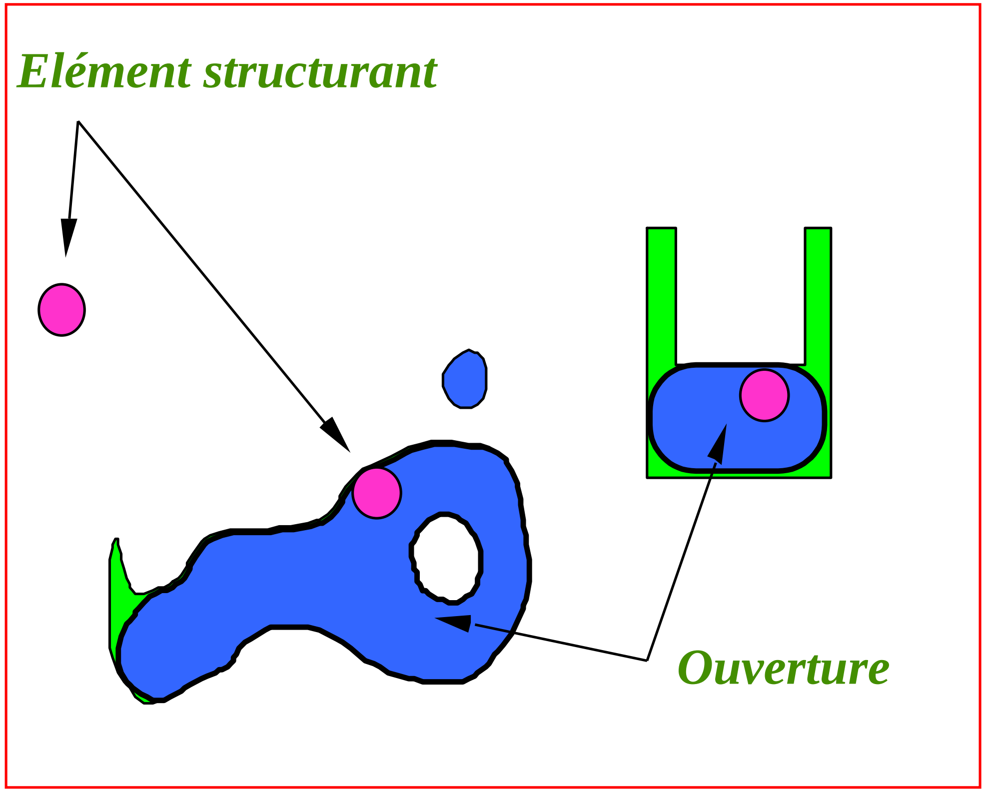
Interprétation géométrique :

$z \in \gamma_B(X) \;\Leftrightarrow\; z \in B_y$ et $y \in X \ominus B$

$$\mathbf{z \in \gamma(X) \;\Leftrightarrow\; z \in B_y \subseteq X}$$

L'ouverture par adjonction $g_B(X)$ est donc la réunion des éléments structurants B(x) inclus dans l'ensemble X.

Dans le cas d'une τ-ouverture , on obtient pour $g_B(X)$ le domaine de X balayé par l'élément B quand on déplace ce dernier dans X en lui imposant d' y rester inclus.



L'ouverture élimine les petites îles , ouvre les isthmes étroits et réduit les caps .

Effets de la Fermeture sur les Ensembles

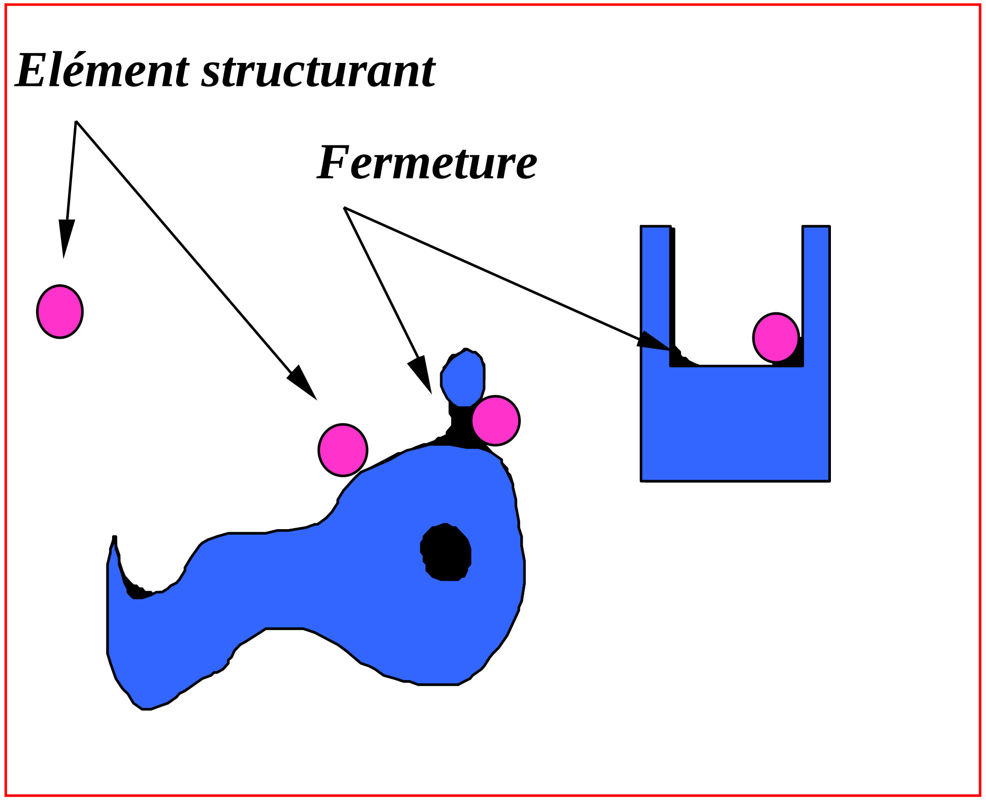
Interprétation géométrique :

Par passage au complémentaire dans la définition de XoB, on voit que

$$X \bullet B = [\,(X \oplus \check{B}) \ominus \check{B}\,]$$

La τ-fermeture s'interprète comme le complémentaire du domaine balayé par l'élément structurant B lorsque celui-ci ne rencontre pas l'ensemble initial. De plus, en général B est symétrique, et le passage au transposé devient sans objet.

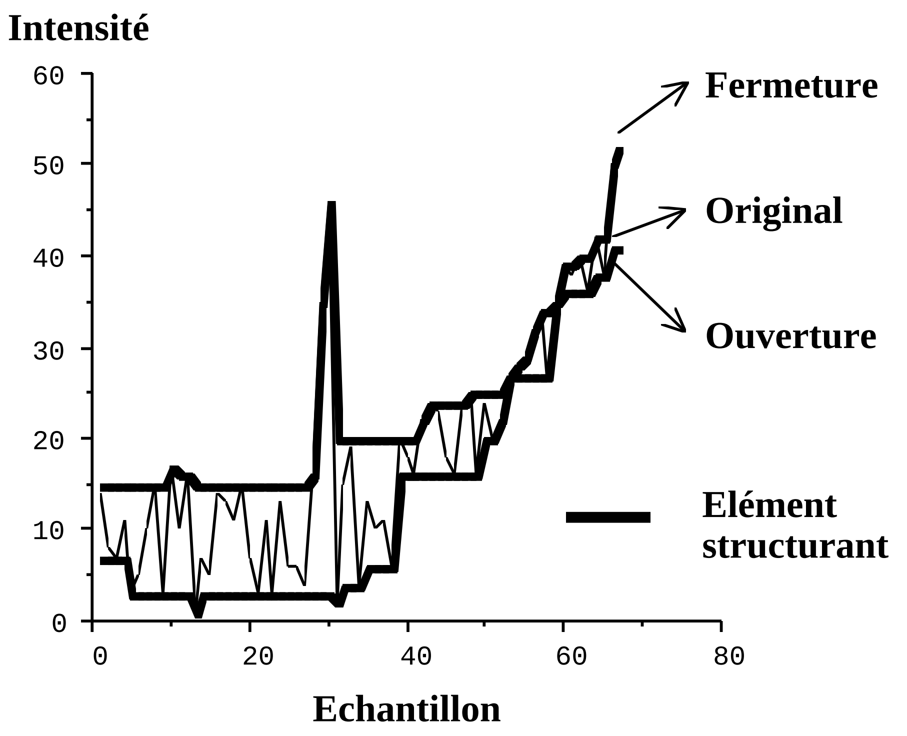
A noter qu'un décalage de l'origine affecte dilatations et érosions, mais ni les ouvertures ni les fermetures.



La fermeture bouche les petits lacs , ferme les chenaux et comble partiellement les golfes

Effets sur les Fonctions

- L'ouverture et la fermeture par adjonction créent une ***fonction plus simple*** que la fonction initiale , en adoucissant celle-ci de manière non linéaire .
- L'***ouverture*** (la fermeture) élimine les ***pics positifs*** (négatifs) qui sont plus étroits que l'élément structurant .
- L'ouverture (la fermeture) est située en dessous (au dessus) de la fonction initiale .



Ouvertures et Fermetures Algébriques

Les trois propriétés fondamentales des ouvertures $\delta\varepsilon$ et des fermetures $\varepsilon\delta$ par adjonction sont aussi bien les **axiomes** du cas général. En effet,

Définition : Dans un treillis complet L, toute transformation

croissante, anti-extensive et idempotente définit une **ouverture** (algébrique),
croissante, extensive et idempotente définit une **fermeture** (algébrique)

Cas particuliers :

Voici deux manières très courantes de créer des ouvertures et fermetures algébriques :

1) prendre un ***supremum d' ouvertures*** (inf. de fermetures)(sect.III-8);

2) procéder par ***reconstruction*** (cf. V- 9 et VI - 5).

Invariants

Soit B l'image du treillis L par l'ouverture (algébrique) γ, *i.e.* $B = \gamma(L)$. Comme γ est idempotente, l'ensemble B constitue la famille des ***invariants*** de γ, *i.e.*

$$\mathbf{b \in B \Leftrightarrow \gamma(b) = B} \; .$$

1/ La classe B est ***stable pour le sup***. Pour toute famille $\{b_j, j \in J\} \subseteq B$, on a

$$\gamma(\vee b_j, j \in J) \geq \vee\{\gamma(b_j), j \in J\} = \vee(b_j, j \in J)$$

par croissance, et l'inégalité inverse par anti-extensivité de γ. De plus, $0 \in B$.

2/ En conséquence, γ est ***la plus petite extension*** à L de l'identité sur B, *i.e.*

$$\boldsymbol{\gamma(x) = \vee\{b : b \in B, b \leq x\}, \qquad x \in L} \; .$$

[le membre de droite est un invariant de γ plus petit que x, mais qui de plus contient $\gamma(x)$.]

Représentation des ouvertures

Inversement, soit $\mathcal{B}$ la classe stable pour le sup. engendrée par une classe $\mathcal{B}_0$ ***arbitraire***. A chaque b $\in \mathcal{B} \cup 0$ associons la dilatation δ_b

$$\delta_b(a) = b \quad \text{si} \quad a \geq b \quad ; \quad \delta_b(a) = 0 \quad \text{sinon},$$

Il lui correspond l'ouverture par adjonction

$$\gamma_b(x) = \vee \{\delta_B(a) \,,\, \delta_b(a) \leq x \} = \begin{cases} b & \text{si } b \leq x \,, \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases} \qquad (2)$$

[Si b $\leq$ x, il suffit de prendre un a $\geq$ b pour avoir un terme = b dans le $\vee$, sinon aucun $\delta_b(a) \neq 0$ n'est $\leq$ x] . La relation (1) devient alors

$$\boldsymbol{\gamma (x) = \vee\{ \delta_b(a) \,,\, b \in \mathcal{B} \}.}$$

***Théorème** (G. Matheron , J. Serra) :* A toute classe $\mathcal{B}_0 \subseteq$ L correspond une unique ouverture sur L qui rende invariants les b $\in \mathcal{B}_0$. De plus, toute ouverture algébrique sur un treillis L se représente comme la réunion des ouvertures par adjonction liées à ses invariants par la relation (2).

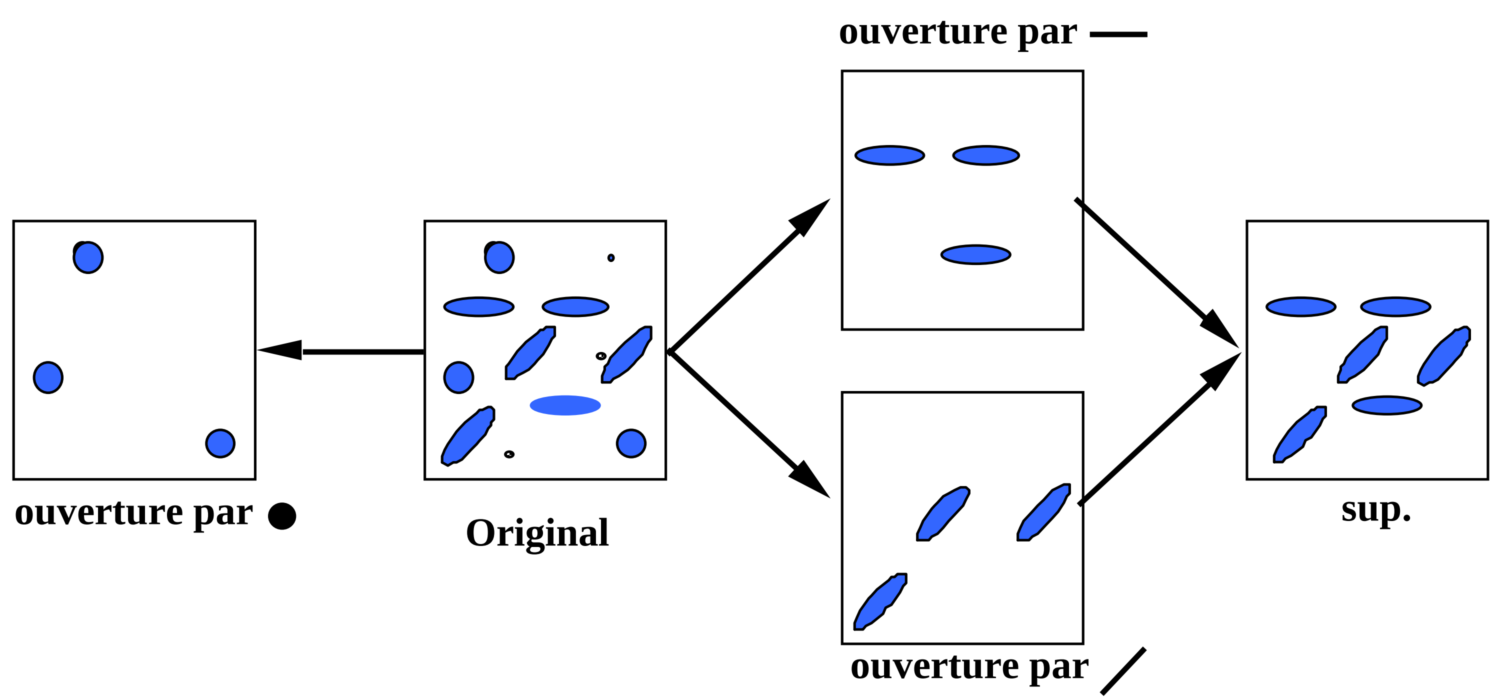
Suprema d'Ouvertures

Propriété :

- Tout supremum d'ouvertures est une ouverture.
- Tout infimum de fermetures est une fermeture.

Exemple d'application :

Sup d'ouvertures par des segments dans toutes les directions du plan, (on trie les objets par leurs longueurs et non par leur cercle inscrit).



Top Hat (Chapeau Haut de Forme)

La notion de top-hat, due à F.Meyer, est un résidu destiné à éliminer les variations lentes du signal, ou encore à amplifier les contrastes. Il s'applique donc essentiellement aux fonctions.

Définition (F.Meyer) :

- On appelle ***Top-Hat*** le résidu entre l'identité et une ouverture invariante par translation verticale :

$$\boldsymbol{\rho(f) = f - \gamma(f)} \ \ (\text{ fonctions}) \quad ; \quad \boldsymbol{\rho(X) = X \setminus \gamma(X)} \ \ (\text{ensembles})$$

- On définit de même un top-hat dual, résidu entre une fermeture et l' identité:

$$\boldsymbol{\rho^*(f) = \varphi(f) - f} \quad (\text{ fonctions}) \quad ; \quad \boldsymbol{\rho^*(X) = \varphi(X) \setminus X} \ (\text{ensembles})$$

Propriétés du Top-Hat

Idempotence :

- le top-hat est idempotent. Si de plus le signal original est positif, le top-hat devient anti-extensif:

$$\rho(\rho(f)) = \rho(f) \qquad , \qquad f > 0 \;\Rightarrow\; \rho(f) < f$$

Plus précisément, le top-hat ramène à zéro les dérives lentes du signal.

Robustesse :

- Si Z est le domaine où l'ouverture de f est strictement inférieure à f:

$$Z = \{x : (\gamma f)(x) < f(x)\}$$

Alors, si g est une fonction positive à support inclus dans Z:

$$\rho(g) = g \,, \qquad \rho(f+g) = \rho(f) + \rho(g)$$

Utilisation du Top-Hat

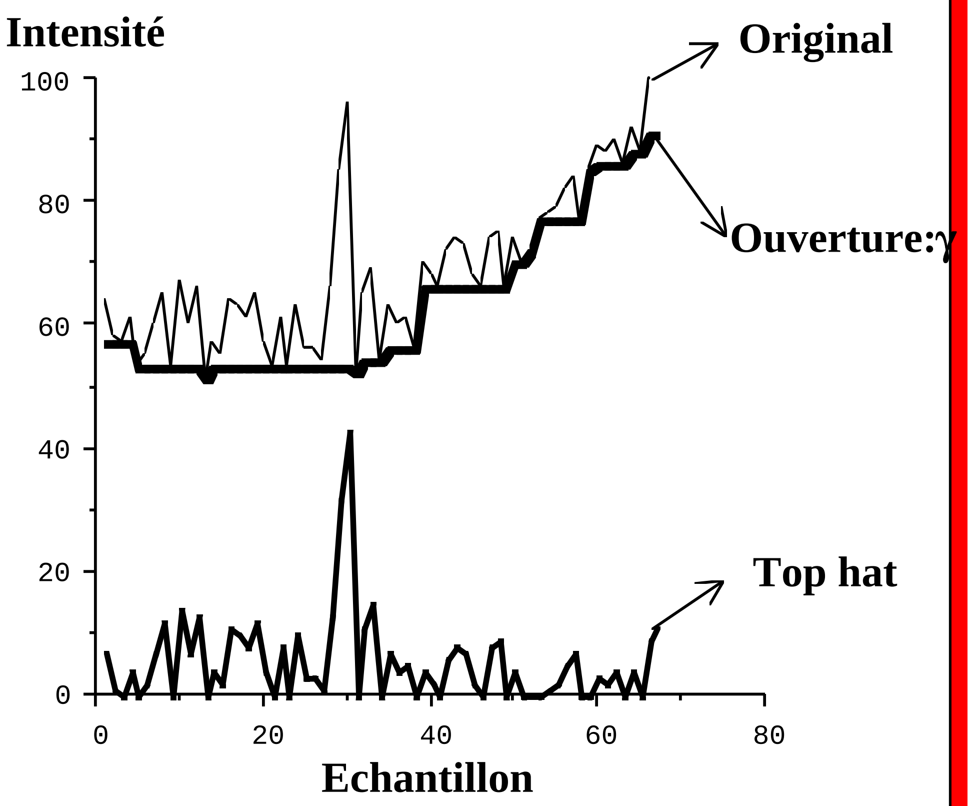
Ensembles :

- Le top-hat isole les objets qui ne sont pas éliminés par l'ouverture, c'est à dire les objets plus grands que l'élément structurant .

Fonctions :

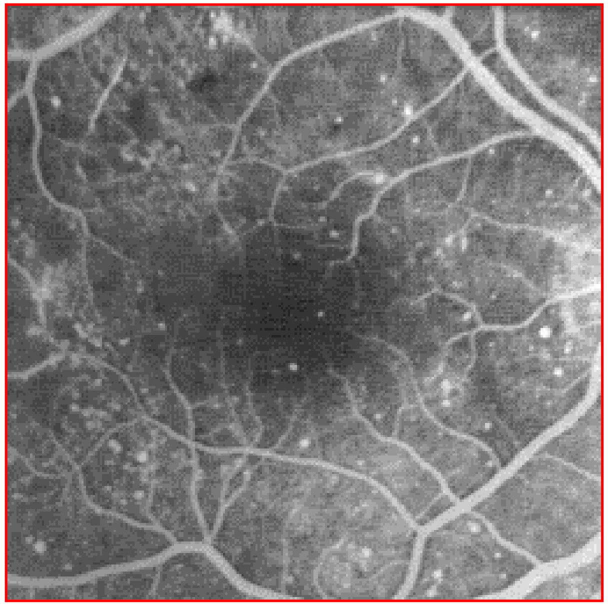
- Le top-hat sert à extraire les composantes contrastées vis à vis de l'environnement. Le top-hat par ouverture extrait les composantes positives et son dual les négatives .

- Schématiquement, le top-hat élimine les dérives, ce qui provoque une augmentation de contraste .

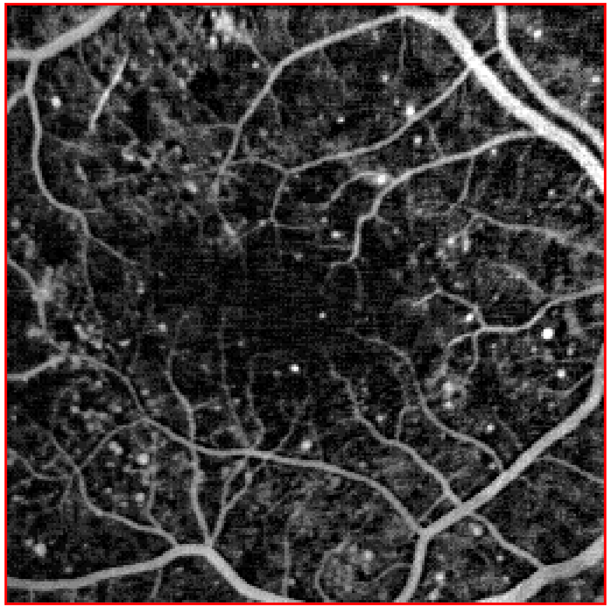


Exemple de Top-Hat

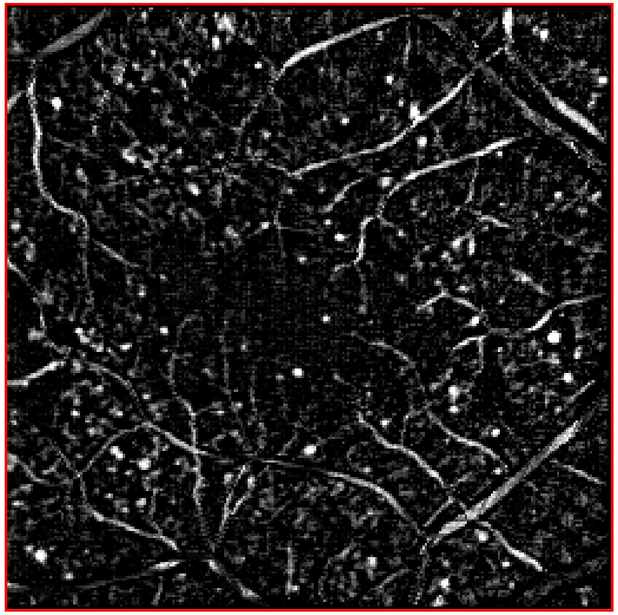
Commentaires : ***Le but est d'extraire les anévrismes (petites taches claires). Le top-hat c),meilleur que le b) est loin d'être parfait. La bonne solution repose ici sur une ouverture connexe (cf. VI-7).***



a) Cliché du fond de l' oeil .



b) Top hat de a) par une ouverture hexagonale de taille 10.

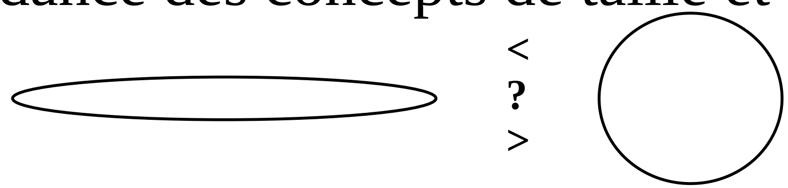


c) Top hat de a) par le sup de trois ouvertures par des segments de taille10.

Granulométrie : Point de Vue Intuitif

- La granulométrie est l'étude de la **taille** des objets. En physique, elle repose principalement sur le tamisage (grains), et l'injection de mercure (milieux poreux).
- Or, les grains refusés par le tamis de taille λ, qui sont une partie de la population initiale, sont refusés aussi par tout nouveau tamisage de taille $\mu \leq \lambda$. Ce sont ces propriétés que nous allons ériger en axiomes.

- Mais il faudra aussi prendre en compte deux autres aspects
  - la dépendance des concepts de taille et de forme :



  - Le rôle de l' homothétie (le concept de taille s' y réduit-il ?)

Méthode : ***Ouvertures ou fermetures par des familles d' éléments structurants qui dépendent d' un paramètre positif, la taille*.**

Granulométrie: Point de Vue Théorique

- **L'axiomatique de Matheron** définit comme ***granulométrie*** toute famille :

  i) d'ouvertures $\{\gamma_\lambda\}$ dépendant d'un paramètre positif λ ,
  ii) et fonctions décroissantes de λ : $\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \gamma_\lambda \leq \gamma_\mu$.

  Ce second axiome est équivalent au ***semi-groupe*** où la composition de deux opérations est égale à la plus sévère :

$$\gamma_\lambda \gamma_\mu = \gamma_\mu \gamma_\lambda = \gamma_{\sup(\lambda,\mu)} \qquad \textbf{(1)}$$

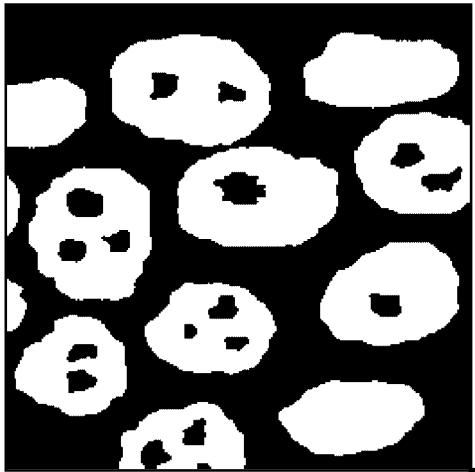
  [$\{ \lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \gamma_\lambda \leq \gamma_\mu \} \Rightarrow \gamma_\lambda = \gamma_\lambda \gamma_\lambda \leq (\gamma_\lambda \gamma_\mu \vee \gamma_\mu \gamma_\lambda) \leq \gamma_\lambda$;
  inversement, $\gamma_\lambda = \gamma_\mu \gamma_\lambda$ et $\gamma_\lambda \leq I \Rightarrow \gamma_\lambda \leq \gamma_\mu$ d'où le semi-groupe (1).]

- Si B_λ et B_μ désignent les invariants de γ_λ et de γ_μ , on voit facilement que

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad B_\lambda \subseteq B_\mu$$

- Enfin, quand les $\gamma_\lambda(X) = X \circ \lambda B$ sont ouvertures par adjonction selon des éléments structurants ***homothétiques*** λB, on obtient une granulométrie si et seulement si B est ***convexe***.

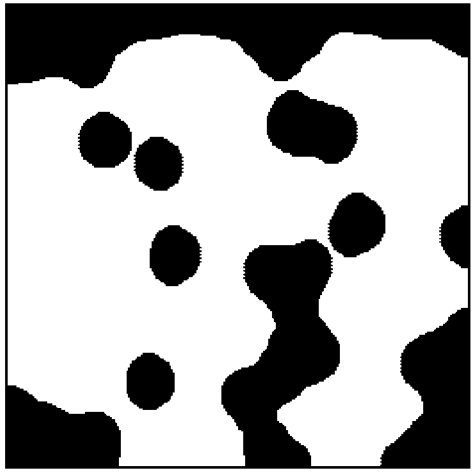
Exemple de Granulométrie

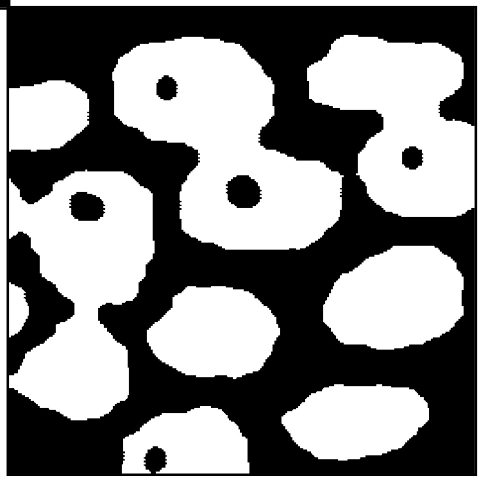


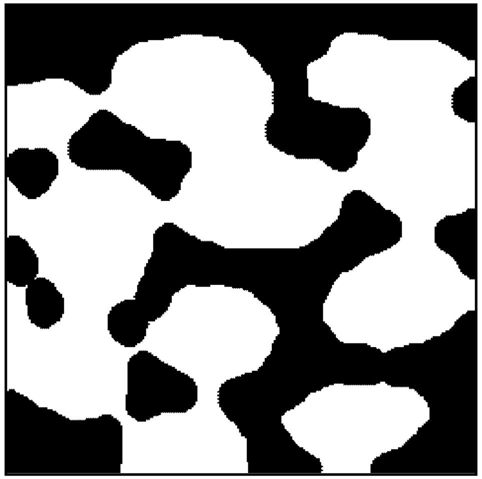
Par dualité, les familles de fermetures $\{\varphi_\lambda , \lambda>0\}$ croissantes en λ engendrent des ***anti-granulométries***, de loi

$$\varphi_\lambda \varphi_\mu = \varphi_\mu \varphi_\lambda = \varphi_{\sup(\lambda,\mu)} .$$

Ici, de gauche à droite, fermetures par des disques croissants.







Commentaire : ***la surface augmente, mais ni le périmètre, ni le nombre de connexité.***

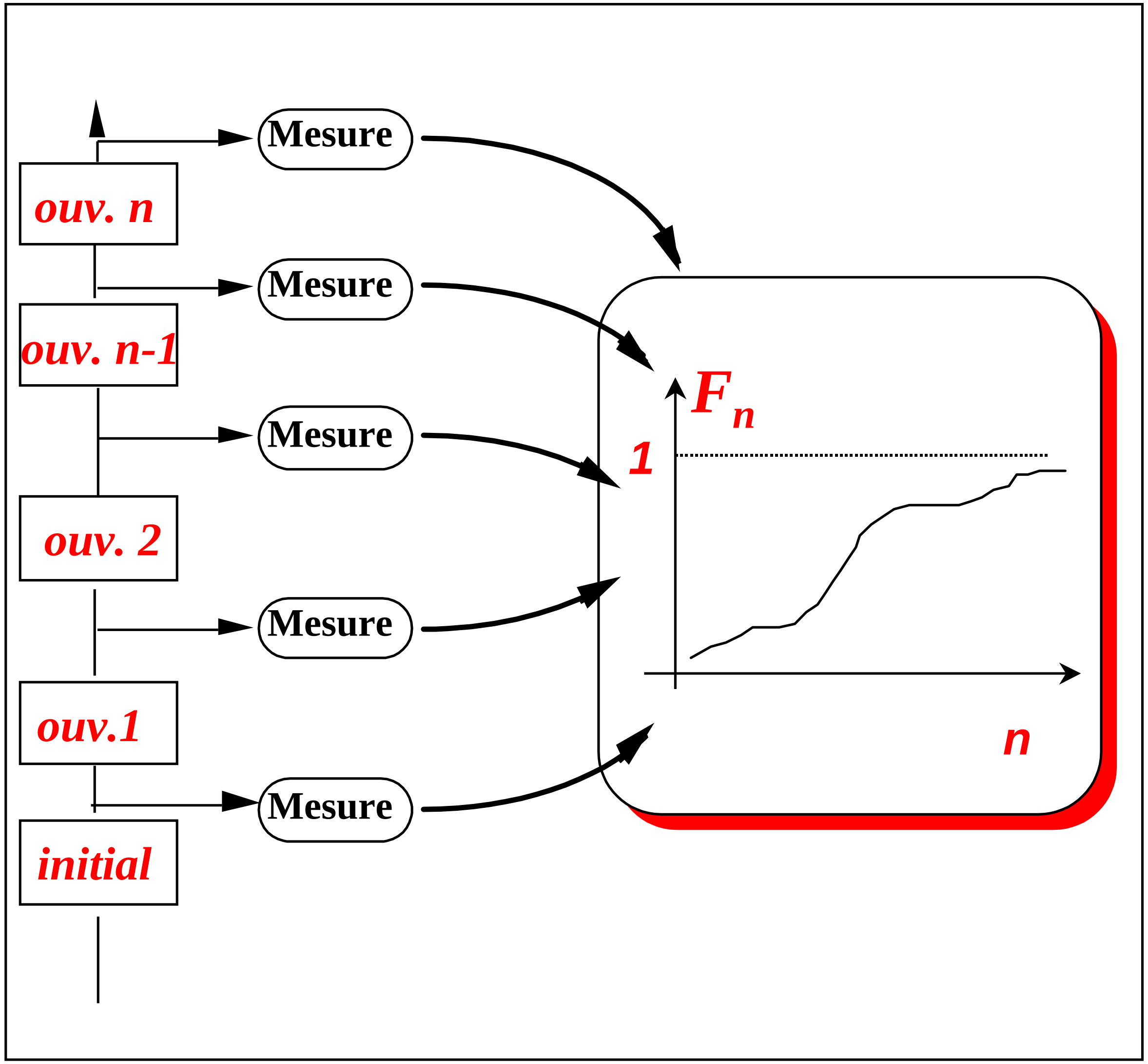
Granulométrie et Mesures

- Une granulométrie se calcule à l'aide d'une pyramide de filtres dont chaque élément (ouverture ou fermeture) agit selon une taille donnée λ ;
  λ est le facteur d' homothétie portant sur le ou les éléments structurants mis en jeu .

- A la sortie de chaque filtre λ on mesure l' aire (ensembles) ou l'intégrale (fonctions), soit M_λ. La quantité :

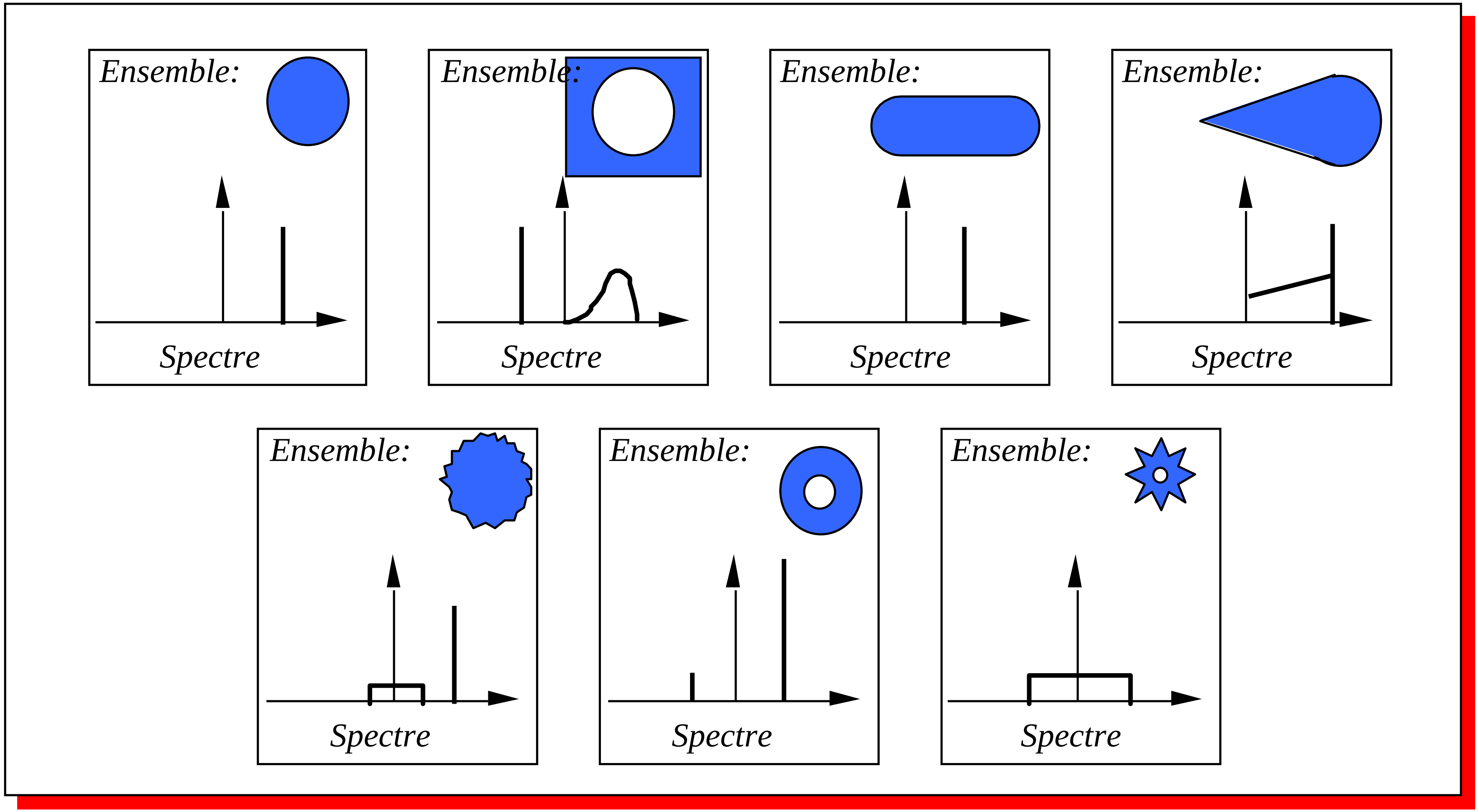
$$F_\lambda = 1 - M_\lambda / M_0$$

est une *fonction de distribution*.



Spectre Granulométrique

On utilise souvent aussi *le* ***spectre granulométrique*** qui est la dérivée de la fonction de distribution granulométrique.



Références

Sur l'ouverture par adjonction, et sur les granulométries :

- Les notions d'ouverture et de fermeture par adjonction, et celle de granulométrie furent introduites par G. Matheron en 1967 {MAT67}, dans le cas euclidien. En 1975, {MAT75} il les relia aux fermetures algébriques au sens de E.H. Moore (début du XXème siècle) et généralisa le concept de granulométrie, mais toujours dans le cadre ensembliste. L'extension aux treillis, avec son théorème de représentation, sont dûs à J. Serra {SER88}. Sur le spectre granulométrique, voir {HUN75}, {SER82, ch.1O} et {MAR87a}. Sur les ouvertures algébriques, voir {RON93}.

Sur le gradient et sur la transformation chapeau haut de forme :

- Le gradient morphologique apparait pour la première fois avec S. Beucher et F.Meyer en 1977 {BEU77}, et l'opérateur «chapeau haut de forme» avec F.Meyer {MEY77}; ces notions sont reformulées en termes d'opérations sur les fonctions dans {SER82}. On trouvera de versions plus sophistiquées de la première dans {BEU90}, et de la seconde (éléments structurants non plans) dans {STE83}, (voir aussi {SER88,ch.9}).