

Chapitre XXVI : Fonctions booléennes

Fonctions et ensembles aléatoires

Ilots booléens

Fonds rocheux booléens

Usage des fonctions booléennes

Fonctions aléatoires considérées comme EFA

Pour construire un analogue numérique des EFA, il faut partir d'une classe de fonctions $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ (E espace topologique) qui

- soit *compacte* (pour pouvoir la probabiliser)
- forme un *treillis complet* (pour y effectuer dilatations et érosions).

La classe F des fonctions s.c.s. répond aux deux critères. En effet:

- F équivaut à la famille des **sous-graphes fermés**, *i.e.* aux fermés C de $\mathcal{F}(E \otimes \bar{\mathbf{R}})$ tels que (Matheron, 1969)

- $E_{-\infty} \subseteq C,$

- $\forall \mathbf{x} \in E, \forall t \in \bar{\mathbf{R}} : (\mathbf{x}, t) \in C \Rightarrow \{\mathbf{x}\} \otimes [\infty, t] \subseteq C ;$

- et une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ est s.c.s. si et seulement si ses sections

$$X_t(f) = \{ \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \geq t \}$$

sont des fermés à décroissance monotones , *i.e.*

$$s \leq t \Rightarrow X_s \supseteq X_t \text{ et } X_t = \text{Lim} \downarrow \{ X_s ; s \leq t \} = \cap \{ X_s ; s \leq t \}$$

Treillis des fonctions s.c.s.

- *Dilatation et érosion*

Puisque la classe des fermés est stable pour les opérations de Minkowski pour les éléments structurants compacts, il découle des propriétés précédentes que

$$\mathbf{B \text{ compact} ; f \text{ s.c.s.} \Rightarrow f \oplus \mathbf{B} \text{ and } f \ominus \mathbf{B} \text{ s.c.s.}}$$

- *Treillis des fonctions s.c.s.*

Le treillis complet sous-jacent ici admet l'infimum numérique usuel, *i.e.*

$$(\wedge f_i)(\mathbf{x}) = \wedge f_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}$$

alors que le supremum est la fermeture topologique du sup numérique :

$$(\vee f_i)(\mathbf{x}) = \vee f_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}$$

En conséquence de cette dissymétrie, la dilatation $(f, \mathbf{B}) \rightarrow f \oplus \mathbf{B}$ est continue, alors que l'érosion $(f, \mathbf{B}) \rightarrow f \ominus \mathbf{B}$ n'est que semi-continue supérieurement.

Propriétés topologiques des fonctions s.c.s.

- La classe F est une **famille compacte** dans $\mathcal{F}(E \otimes \bar{\mathbb{R}})$, où les ouverts sont les parties de F dont les éléments vérifient les deux conditions :
$$X_f^+(G) = \sup \{ f(x), x \in G \} > b \quad \text{et} \quad \inf \{ X_f^+(G), G \supset K \} < a ,$$
quand G décrit l'ensemble des ouverts de E et K celui de ses compacts.
- Une séquence f_n **converge** vers f dans F si et seulement si
 - $i)$ pour tout $x \in E$, il existe une séquence $x_n \rightarrow x$ dans E telle que la séquence $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} ;
 - $ii)$ si une séquence x_{nk} converge vers x dans E , alors la séquence $f_{nk}(x_{nk})$ vérifie **$\text{Lim } f_{nk}(x_{nk}) \leq f(x)$** .

Fonctions aléatoires s.c.s. (*G. Matheron, 1969*)

- Munissons F de la σ - algèbre engendrée par sa topologie, *i.e.* par les événements

$$X_f^+(G) = \sup \{ f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G \} > b .$$

- Une fonction aléatoire s.c.s. est alors définie par la donnée de l'espace mesurable (F, σ) et d'une probabilité P . De telles probabilités existent car F est compact.
- De même qu'une variable aléatoire se caractérise par sa fonction de distribution, de même la fonction aléatoire $f \in (F, \sigma, P)$ est **déterminée** par les distributions conjointes

$$\Pr \{ \sup\{ f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B_1 \} < \lambda_1 ; \dots \sup\{ f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B_n \} < \lambda_n \}$$

pour toutes les suites finies $\{B_i\}$ de compacts et $\{\lambda_i\}$ de réels (*J. Serra*).

Notations pour le cas bi-dimensionnel

- T** : Axe ("*vertical*") des niveaux de gris. T représente \bar{R} , \bar{Z} ou l'un, quelconque, de leurs segments fermés ,
- f'** : grain primaire, ici une fonction s.c.s. dont, pour tout $t > -\infty$, les sections horizontales sont p.s.compactes,
- Π_t** : plan test "*horizontal*" de cote t (avec $\Pi_0 \sim \mathbb{R}^2$),
- $f \oplus K$** : dilatation de f par le *réciroque* K de K ,
- a(K), u(K)** : aire, périmètre de K (K : compact 2D),
- v(f), $\rho(f)$, h(f)** : volume, module du gradient, et cote maximale de la fonction bi-dimensionnelle f .

De plus, par convention, quand K , f sont *aléatoires*, a(K), v(f), etc.. désignent les *Espérances Mathématiques* des variables aléatoires correspondantes.

Construction des îlots booléens

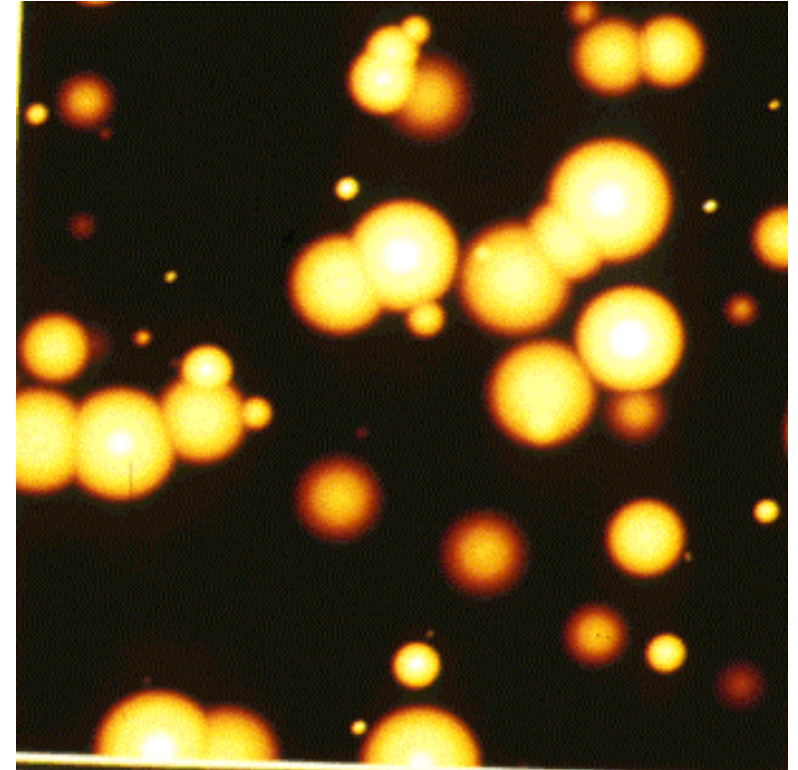
- On réalise des points poissonniens I (les "*germes*") d'intensité θ , sur le plan Π_0
On se donne comme *grain primaire centré à l'origine* la fonction aléatoire f' , p.s. compacte ;

A chaque point $i \in I$ est affectée une réalisation f'_i du grain primaire transité au point i ;

Puis on prend le supremum f , en I , de tous les f'_i ;

$$f = \vee \{ f'_i, i \in I \}$$

qui engendre, par définition, une réalisation de la *fonction booléenne* (θ, f') .

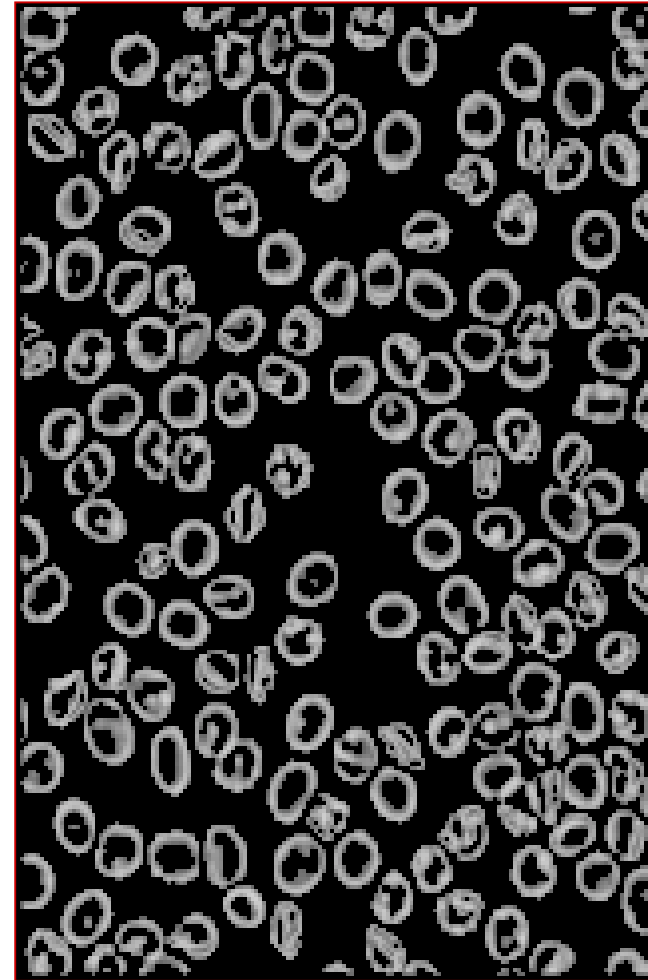


Simulation de cônes booléens

Exemples d'îlots booléens



Cristaux de ferrite



Hématites

Fonctionnelle Caractéristique $Q(K)$

- **Equation de base du modèle (J. Serra) :**

K est un élément structurant compact dans $R^2 \otimes T$. Supposons tout d'abord que K_t , plan, soit contenu dans le plan P_t . Alors K_t est disjoint du sous-graphe de f ssi il est inclus dans les pores de l'ensemble booléen $f \cap \Pi_t$, *i.e.* :

$$Q(K_t) = \exp \{ -\theta a [(f \oplus K_t) \cap \Pi_t] \} \quad (1)$$

On montre facilement que la rel.(1) reste vraie pour K tridimensionnel.

- **Généralisation:**

En remplaçant l'aire a par le volume moyen μ_n , à n dimensions, nous obtenons *directement* l'expression de $Q(K_t)$ dans l'espace $R^n \otimes T$.

A noter que $Q(K_t)$, bien qu'invariant pour les translations horizontales, dépend au plus haut point de la cote t , *i.e.* de l'*altitude* de K_t .

Moments (I)

En règle générale, on passe des $Q(K_t)$ aux caractéristiques du grain primaire dans $R^2 \otimes T$ en **sommant** les moments de $\text{Log } Q(K_t)$ en t (D. Jeulin, J. Serra). En particulier, si q et u désignent la porosité et le périmètre spécifique pour la section $f \cap \Pi_t$, on atteint, à θ près.

Le **volume** $v(f')$, à partir de la rel.(1), en réduisant K à un point :

$$\theta v(f') = \int_T a(f' \cap \Pi_t) dt = - \int_T \text{Log } q_t dt ;$$

L' intégrale $\rho(f')$ du **module du gradient** de f' , en faisant :

$$\theta \rho(f') = \int_T (u_t / a_t) dt$$

Ces deux cas particuliers proviennent de la **formule générale** suivante :

$$- \int_T t^{k-1} \text{Log } Q(K_t) dt = (\theta / k) E \left[\int_{R^n} n(f' \oplus K)^k(x) dx \right] ; \quad k > 0$$

Moments (II)

- *Autres moments :*

- La *covariance d'ordre un* du grain f' est obtenue en prenant pour $K(h)$ un doublet de points horizontaux, extrémités du vecteur h :

- $$\int_{\mathbb{R}^2} \text{Log } Q [K_t(h)] dt = 2 \theta v(f') - \theta \int_{\mathbb{R}^2} \inf [f'(x), f'(x+h)] dx$$

- Si l'on suppose un seul maximum au grain primaire, la loi de probabilité de son *altitude* u est accessible. Supposons que cette loi admette une densité $\bar{\omega}$, et soit $v(t)dt$ le *nombre spécifique des maxima* de f dans l'intervalle $(t, t+dt)$. Alors, clairement:

$$\theta \bar{\omega}(t) q(t) dt = v(t) dt.$$

N. B. *mutatis mutandis*, les six moments ci-dessus s'étendent directement au cas à n dimensions

Ilots booléens et convexité

- **Test de base:**

Quand les *sections* de f' (mais pas nécessairement la *fonction* f') sont convexes, on trouve alors, en appliquant la formule de Steiner à $\text{Log } Q(K)$:

$$-\int_{\mathbb{T}} \text{Log } Q(\lambda K_t) dt = \theta [\lambda^2 a(K) h(f') + \lambda u(K) \rho(f') / 2\pi + v(f')]$$

Comme θv , $\theta \rho$ and h sont toujours accessibles, cette relation permet donc, à la fois, de tester l'hypothèse de convexité et d'estimer θ (en prenant pour K un carré ou un hexagone).

- **Autres tests :**

D'autres tests reposent sur les K de grande taille, et aussi sur la convexité de f' lui-même (*D. Jeulin*).

Fonctions booléennes asymptotiques : les fonds rocheux

- Dans les îlots booléens, germes poissonniens étaient concentrés sur Π_0 . On peut les implanter différemment dans $\mathbb{R}^n \otimes T$, en choisissant une intensité $\theta(dt)$ qui *dépende* de t .
- Par exemple, en prenant θ constant dans le demi-espace négatif, et un grain primaire f' indépendant de t , on définit le modèle des **Fonds Rocheux** (*J. Serra*) :

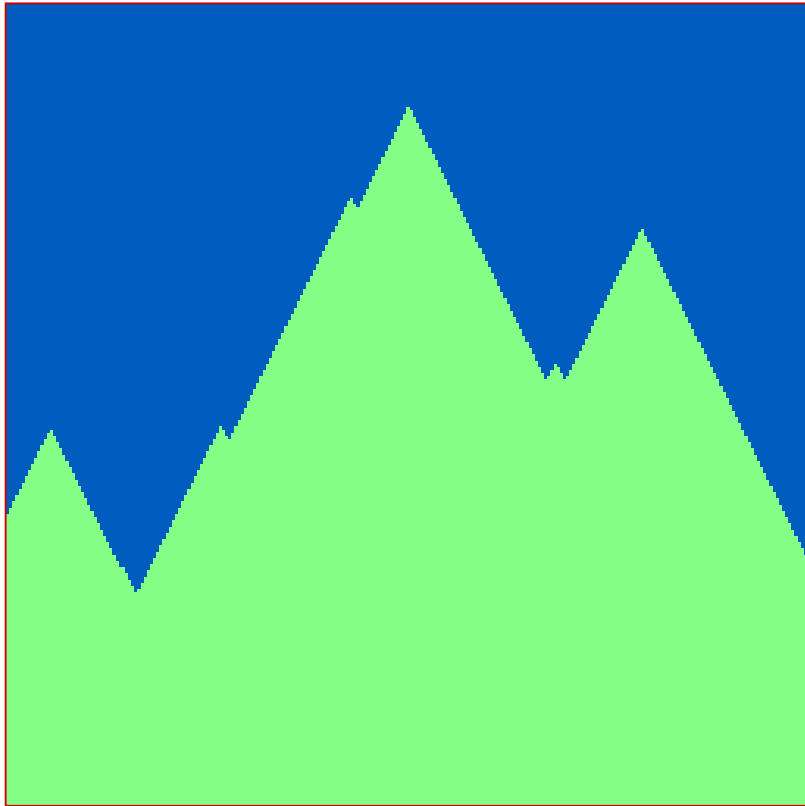
$$i) \quad \theta (dt) = 0 \quad \text{si } t > 0 ,$$

$$\theta (dt) = \theta dt \quad \text{sinon ,}$$

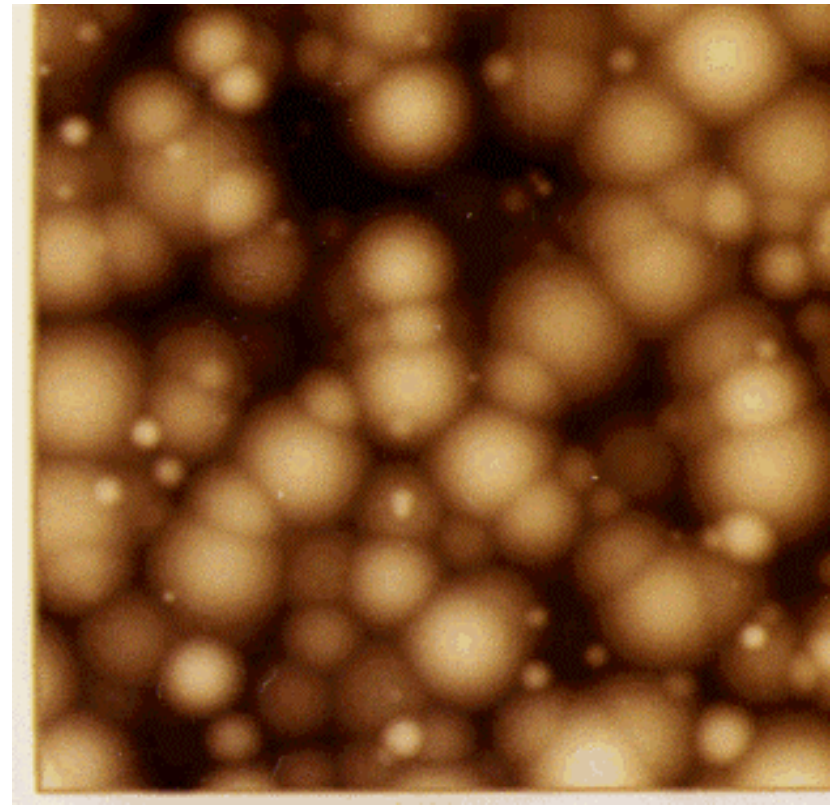
$$ii) \quad f' (x , t) = f' (x) .$$

(*Aussi profond que l'on plonge, on trouve toujours des reliefs et jamais le fond plat*).

Exemples de fonds rocheux



Dans $R^1 \otimes T$, avec des fonctions primaires coniques



Dans $R^2 \otimes T$, avec des fonctions primaires paraboloides

Fonctionnelle $Q(K)$ des fonds rocheux

La *formule de base* du modèle est assez proche de celle des îlots

$$Q(K_t) = \exp \left\{ -\theta \left[\int_T a \left[(f' \oplus K)_{\cdot t} \cap \Pi_u \right] du \right] \right\}$$

(L'intégrale supplémentaire provient de la distribution 3D des germes)

- La *dérivée logarithmique* de $Q(K_t)$ par rapport à t est instructive. En effet,

$$\left[Q(K_t) \right]' / Q(K_t) = \theta a \left[(f' \oplus K) \cap \Pi_t \right],$$

Le membre de gauche doit être positif et décroître en fonction de t . Cela permet de tester le modèle et de le différentier des îlots booléens.

- Les *moments* sont donnés par la formule générale suivante, différente de celle des îlots:

$$-\int t^{k-2} \text{Log } Q(K_t) dt = \theta / k(k-1) \cdot E \left[\int_{\mathbb{R}^2} (f' \oplus K)^k(x) dx \right] \quad k > 1$$

Prototypes de fonctions booléennes

- *Généralisation ?*

Pouvons nous étendre la technique utilisée pour les fonds rocheux et construire des fonctions booléennes plus générales, dont l'intensité $\theta(dt)$ varie selon t , dans $\mathbb{R}^n \otimes T$?

- *Une situation ambiguë*

En fait, une *même* fonction booléenne est décomposable de *plusieurs façons* puisqu'on peut toujours considérer un grain germé en (dx, Π_t) comme germé en (dx, Π_0) avec une autre loi de probabilité .

- *Décompositions et unicité*

C'est pourquoi on peut énoncer (*F. Prêteux, M. Schmitt*):

- Si $\int_T \theta(dt) < \infty$, la fonction équivaut à des *îlots booléens* ;
- Si $\int_T \theta(dt) = \infty$, la fonction équivaut à des *fonds rocheux* .

Propriétés ensemblistes

- **Propriétés de base**

Le supremum de F.B., leurs dilatés par tout compact de $\mathbb{R}^n \otimes T$ sont encore Booléens, ainsi que leur sections "verticales" (les "horizontales" engendrent des fermés Booléens de \mathbb{R}^n).

- **Divisibilité indéfinie pour le sup**

Toute F.B. peut s'écrire, pour tout $k > 0$

$$f = \text{Sup} \{ f_j, j \in [1, \dots, k] \}$$

où les f_i sont k F.B. équivalentes, et indépendantes.

- **Domaine d'attraction**

Soient $\{f_j\}$ des fns aléatoires s.c.s. stationnaires et p.s. bornées,
 $\{k_j\}$ des fns aléatoires binaires, stat., à grains p.s. compacts

Quand $E[k_j] \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$ avec $E[k_j] \times p \rightarrow m < \infty$, la fonction

$$\phi_p = \bigvee \{ (k_j \wedge f_j), 1 \leq j \leq p \} \quad \text{tend vers des } \hat{\text{îlots}} \text{ booléens .}$$

Ilots booléens et stéréologie

- **Densités induites**

- Soit $f_3 = (f'_3, \theta_3)$ une fonction d'îlots booléens dans $R^3 \otimes T$, et soient $S'_3(\omega)$ et $D'_3(\omega)$ l'aire et la largeur moyennes de la projection du support de f'_3 .
- Si l'on coupe R^3 par :
 - un **plan** $\Pi_0(\omega)$ de direction ω , alors $\theta_2(\omega) = \theta_3 D'_3(\omega)$
 - une **droite** $\Delta_0(\omega)$ de direction ω , alors $\theta_1(\omega) = \theta_3 S'_3(\omega)$.

- **Grains Primaires induits**

Comme les porosités q_t sont invariantes par sectionnement vertical, nous pouvons écrire $\theta_3 v_3(f'_3) = \theta_2 v_2(f'_2) = \theta_1 v_1(f'_1)$ d'où

$$v_3(f'_3) = v_2(f'_2) D'_3(\omega) = v_1(f'_1) S'_3(\omega)$$

(relations analogues pour les intégrales de gradient et pour les maxima des f' s)

Usage des fonctions booléennes

Que pouvons nous attendre des calculs sur les fonctions booléennes ?

- **Estimation** de paramètres tridimensionnels à partir de sections planes,
- **Séparation** des rôles dus à la nucléation et à la croissance dans une cristallisation (de même façon pour les fermés Booléens),
- **Comptage :**

De l'intégrale $-\int_T \text{Log } q_t dt = \theta_2 v'_2 = \theta_3 v'_3 \quad (2)$,

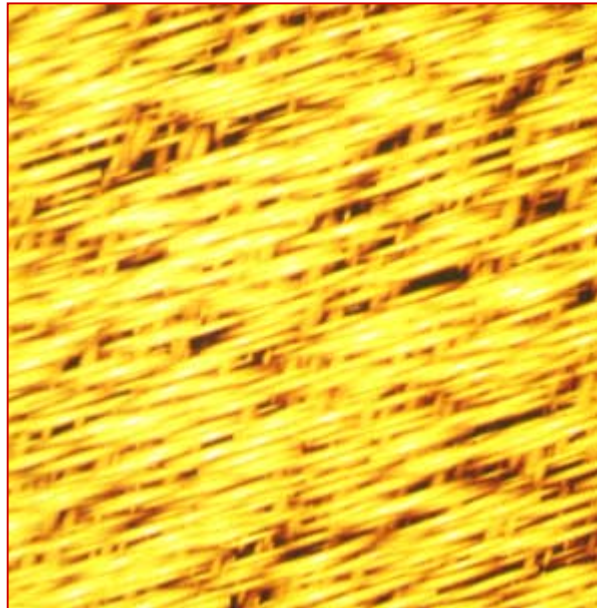
on tire une estimation de θ_2 , et même de θ_3 ,

– dès que l'on connaît *a priori* v'_2 ou v'_3 ,

– ou que l'on estime ces quantités sur des grains isolés .

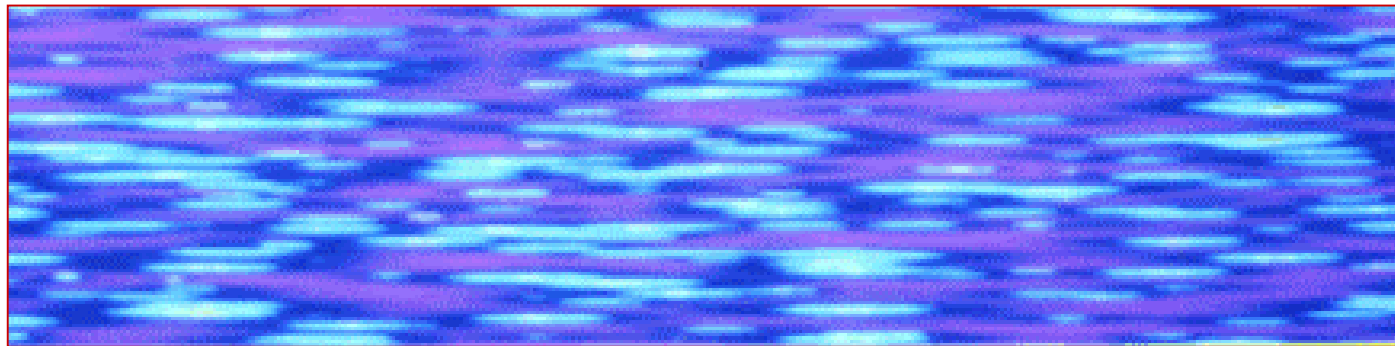
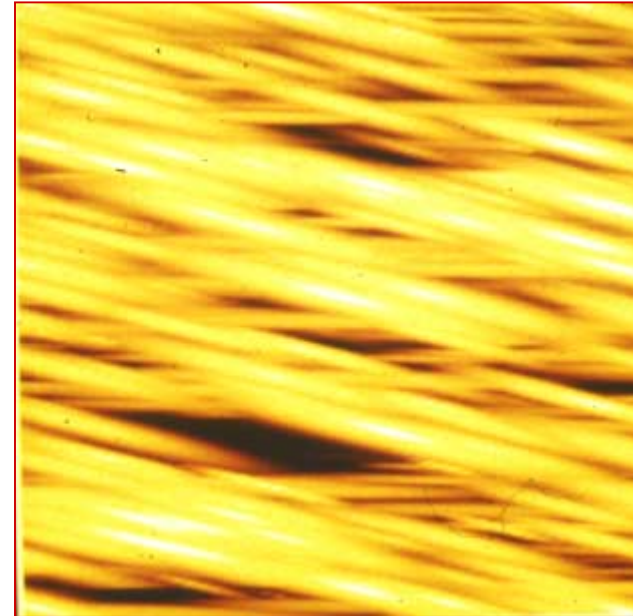
Exemple: simulations de facies entrecroisés

a)



*a) et b)
cônes
paraboloïdes
cylindres*

b)



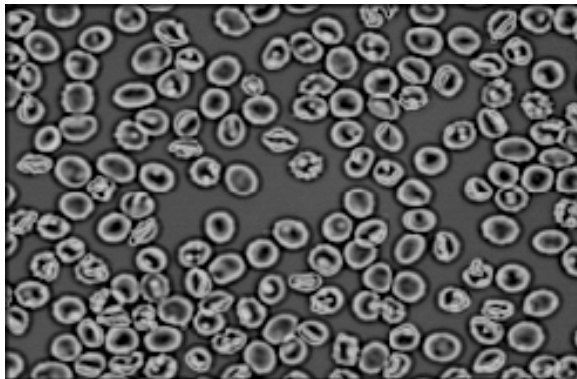
c) cones et cylindres

Exemple de comptage

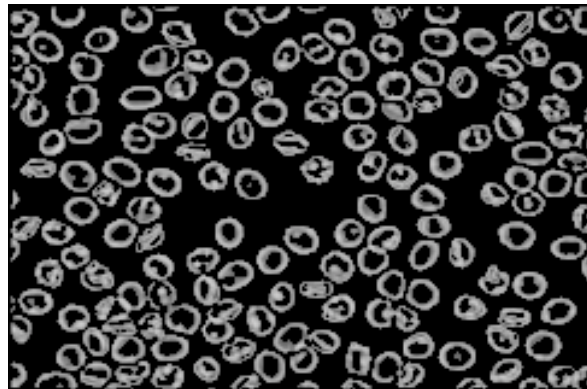
- *Exemple de comptage : Numération sanguine*

Reprise de l'exemple XIV-31 où le seuillage est remplacé par la mise à 0 du fond (îlots booléens). Le nombre n des hématies (estimé à 188 en binaire) est donné par la formule (2) :

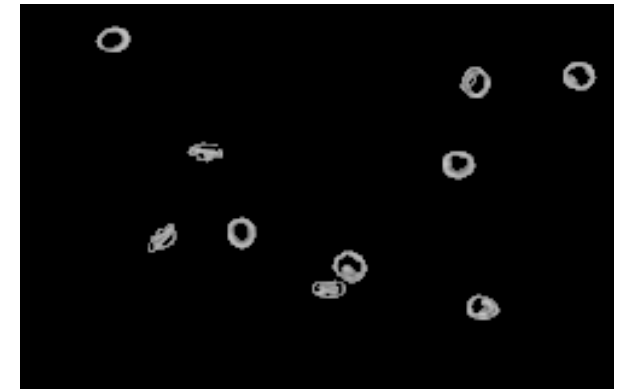
$$n = - (\text{champ} \cdot \int_T \text{Log } q_t dt) / v' = 39360 \cdot 70,055 / 14.020 = 196,7$$



*a) hématies
(champ: 39360)*



*fond noir de a)
pour $t = 90$*



*volume moyen d'une
hématie : $v' = 14.020$*

Applications des fonctions booléennes

Dans quels domaines les fonctions aléatoires booléennes ont elles montré leur pertinence ?

- **Description de textures** (e. g. microscopie électronique)
- **Stéréologie** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (Nombres , tailles , Evolutions) ,
- **Utilisation heuristique** (e. g. Algorithme de comptage) ,
- **Prédiction** (distributions du sup (ou de l' inf) dans certaines zones, e.g. pollution) ,
- **Géostatistique** (lois des changements de supports dans les calculs de réserves) ,
- **Fractographie** (lois de propagation de fractures à partir de sollicitations Booléennes) ,
- **Synthèse d' images** (banques de textures , codage d' images) .

Références (I)

(Toutes ces références, excepté les deux dernières, portent sur la première publication de travaux originaux. Les simulations 2-D ci-dessus viennent de l'étude de J.M. Chautru)

J. Serra (1982), Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. I, Ac. Press, London (Chap. XII) [*texte fondateur sur la théorie des fonctions booléennes*]

D. Jeulin (1985), Anisotropic rough surface modelling by random morphological functions, Proc. 4th Symp. on Stereology, Göteborg, 1985: Acta Stereol., 6 (1987), pp. 183-189. [*Calculs de moments, modèles spécifiques*]

J. Serra (1985), Les fonctions aléatoires booléennes, Ecole des Mines, Paris. [*Calculs de moments*]

F. Prêteux et **M. Schmitt** (1986), Fonctions booléennes et modélisation du spongieux vertébral, Int. Electronic Image Week, Nice, April 1986, 2, pp. 476-481. [*Simulations, usage d'éléments structurants 3-D, application à la radiologie*]

J. Serra (1986), Exercices de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines, Paris. [*Définition et calcul du modèle des fonds rocheux*]

J. Serra (1988), Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. II: Theoretical Advances, Ac. Press, London (Chap. XV) [*Théorie générale des fonctions booléennes*]

Références (II)

- F. Prêteux, M. Schmitt** (1988), Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. II: Theoretical Advances, (J. Serra, Ed.) Ac. Press, London, pp. 377-400. [*Réduction aux deux modèles des îlots booléens et des fonds rocheux, estimations*]
- G. Matheron** (1989), Two classes of isofactorial models, Third Int. Geostatistics Cong., Avignon. Reidel Publ., Dordrecht, Nld. [*Utilisation des fonctions booléennes pour des prédictions non linéaires*]
- J. Rivoirard** (1989), Models with orthogonal indicator residuals, Third Int. Geostatistics Cong., Avignon. Reidel Publ., Dordrecht, Nld. [*Utilisation des fonctions booléennes en géostatistique*]
- J-M. Chautru** (1989), The use of Boolean random functions in geostatistics, Third Int. Geostatistics Cong., Avignon. Reidel Publ., Dordrecht, Nld. [*Simulations en geology, changement de support en géostatistique*]
- J. Serra** (1989), Boolean random functions, J. of Micr., Vol. 156, Pt 1, pp. 41-63, [*présentation des fonctions booléennes*]
- D. Jeulin** (1991), Modèles morphologiques de structures aléatoires et de changement d'échelle, Thèse Doctorat ès Sciences Physiques, Univ. Caen. [*présentation des fonctions booléennes*]