

Chapitre XXIII : L'érosion linéaire

Moment $P(h)$

Interprétation probabiliste

Granulométries linéaires

en nombre

en mesure

Etoile

Courbure et rugosité

Erosion linéaire et covariance

Mesure de l'érosion linéaire et covariance sont deux notions soeurs.

Similarités

- L'élément structurant γ est le **segment**, soit pris dans sa totalité, soit via ses extrémités;
- Valeur et dérivée à l'origine sont identiques, et admettent les mêmes interprétations géométriques (**volume, surface spécifique**) ;
- étoile et portée se correspondent, et présentent un contenu stéréologique.

Différences

- L'érosion linéaire débouche sur une **granulométrie**;
- son comportement à l'origine est plus riche que celui de la covariance (**nombre de convexité, rugosité**);
- elle n'admet pas la généralisation numérique de la covariance; aussi nous l'étudions ici dans le cas **binaire**, le plus fécond en interprétations.

Le moment $P(\mathbf{h})$

- Soit dans \mathbb{R}^n le vecteur $\vec{\mathbf{h}}$ d'origine 0, de module h et de direction α . Prenons pour élément structurant B le *segment* $[0, h]$ et considérons l'érosion

$$X \ominus B = \cap \{ X_{-\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in [0, h] \}$$

$X \ominus B$ est l'ensemble des points communs à X et à tous ses translatés par les vecteurs compris entre 0 et $\vec{\mathbf{h}}$.

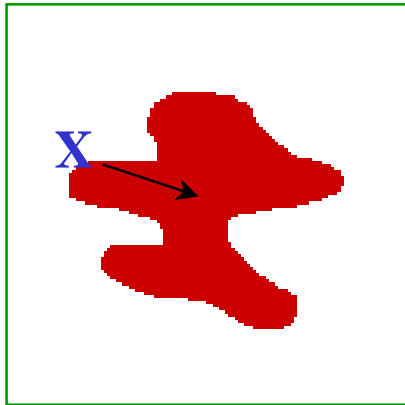
- *Définition* : On appelle *moment* $P(\mathbf{h})$ de X la mesure de Lebesgue de $X \ominus B$, et l'on note:

$$P(\vec{\mathbf{h}}) = P_{\alpha}(\mathbf{h}) = P_{\alpha+\pi}(\mathbf{h}) = \text{Mes}[X \ominus B]$$

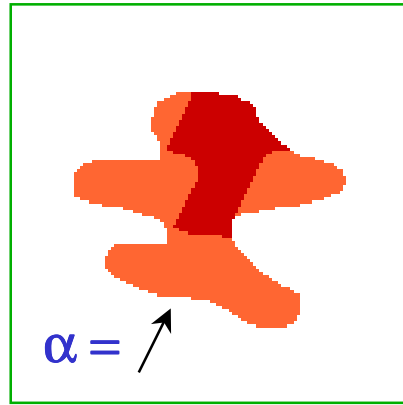
En particulier : $P_{\alpha}(0) = \text{Mes } X$ et $St = \int P(\vec{\mathbf{h}}) d\vec{\mathbf{h}} / \text{Mes } X$

L'intégrale St du moment $P(\mathbf{h})$, rapportée au $P_{\alpha}(0)$, se nomme l'*étoile de X*.

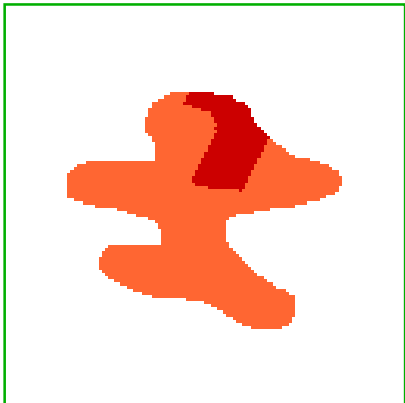
Erosion linéaire : exemple



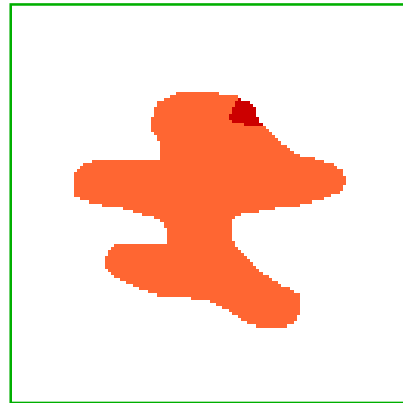
$h = 0$



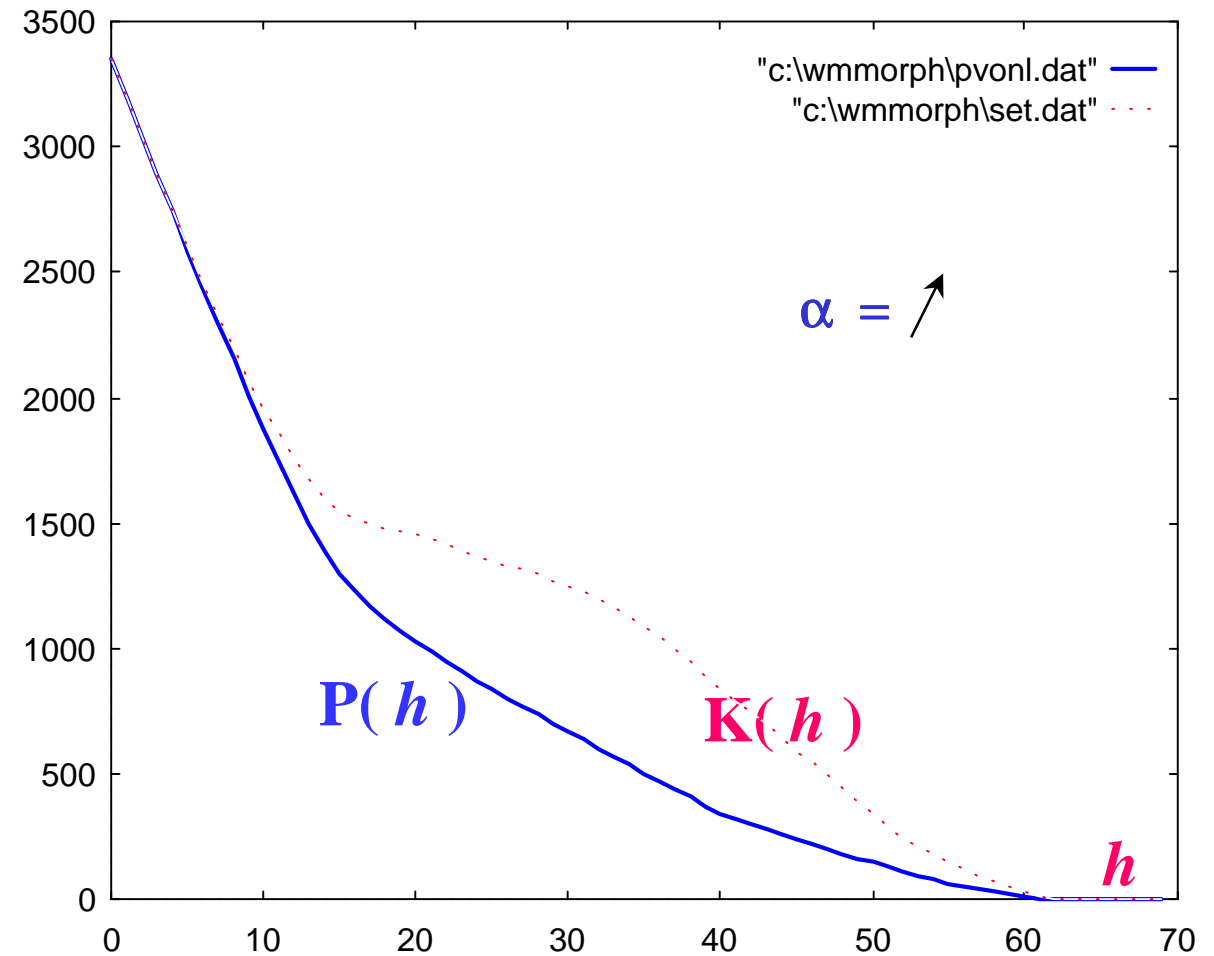
$h = 20$



$h = 40$



$h = 60$



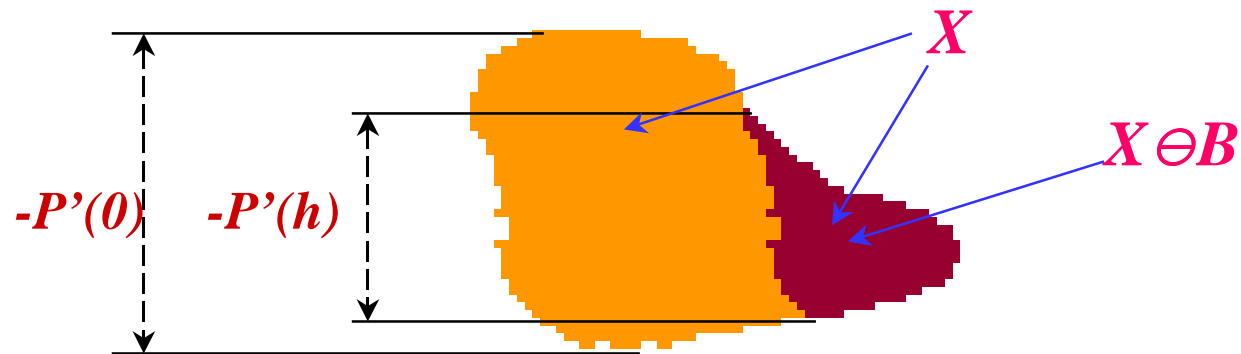
N.B. on a reporté, pour mémoire, le covariogramme. A noter l'identité des comportements à l'origine.

Quelques propriétés (I)

- *A l'origine:*

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{0}) = \text{Mes } \mathbf{X} \quad \text{et} \quad -\mathbf{P}'_\alpha(\mathbf{0}) = -\mathbf{K}'_\alpha(\mathbf{0}) = \text{var. diamétrale } [\mathbf{X}]$$

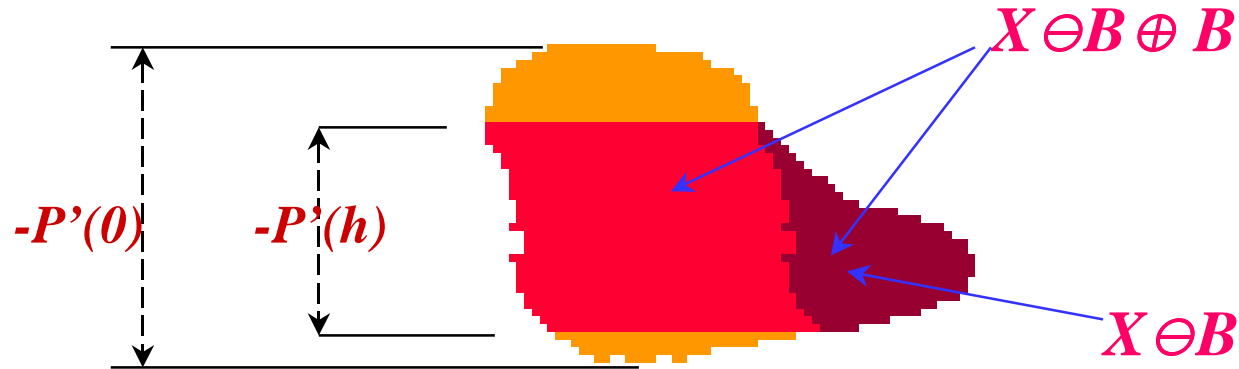
(les moyennes de rotation admettent donc les mêmes interprétations que celles de la covariance, cf. 12- 4)



- *Quand h augmente :*

$$\begin{aligned} \text{il vient, } \forall \alpha : \quad & \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{h}) \geq \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{h}) \geq 0 \\ & \mathbf{h}_1 \geq \mathbf{h}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{h}_1) \leq \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{h}_2) \\ & \mathbf{P}_\alpha(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Quelques propriétés (II)



- **Granulométrie :** La fonction de répartition des cordes s'écrit :

$$1 - F(h) = P'(h) / P'(0) = \text{pourcentage des cordes } \geq h$$
- **Ouverture :** Soit $X \circ B = X \ominus B \oplus B$ l'ouvert de X par le segment B ; on a

$$\text{Mes}[X \circ B] = P(h) - h P'(h)$$

La granulométrie par ouverture, dérive donc du $P(h)$, qui contient toute l'information pour construire la fonction de répartition

$$1 - G(h) = \text{Mes}[X \circ B] / \text{Mes}X$$

Individus et Pondérations

- *Mesures globales ou analyse individuelle ?*

Supposons maintenant que $X = \cup X_i$ se présente comme la réunion de grains disjoints X_i , connexes ou non (par exemple, si les X_i sont les sections planes d'un X de l'espace):

Comment passer des $P_{\alpha,i}(h)$ à $P_{\alpha}(h)$?

- *Deux façons de pondérer*

C'est l'histoire du boucher qui vend du pâté d'alouette, et qui annonce '*Excellent pâté mixte : 50% alouette, 50% cheval*'... du moment que pour une alouette il y rajoute un cheval.

Aussi bien, quand on parle de la statistique de tailles d'objets, il convient de préciser si l'on compte chaque individu

- pour *un* (ex: formule sanguine) \Rightarrow *analyse en nombre;*
- ou en % de son *volume* (ex. tamisage) \Rightarrow *analyse en mesure.*

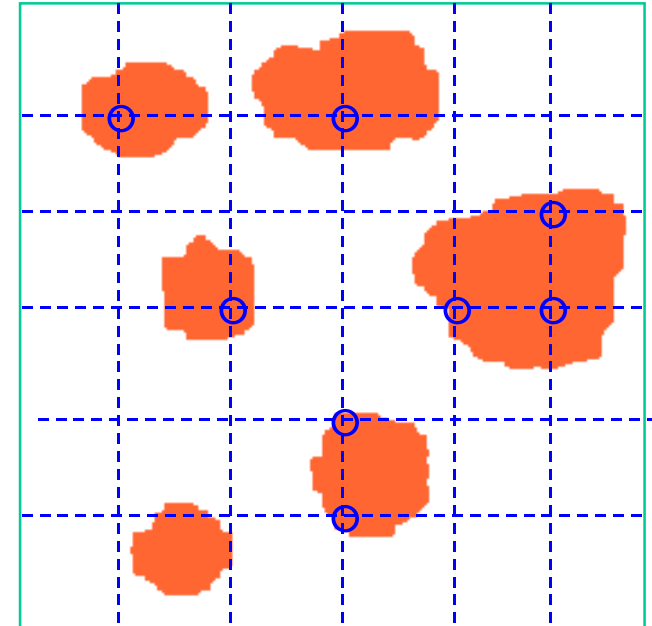
Poids, Echantillonnage, et Stéréologie

- *Echantillonnage*

- En échantillonnant l'espace selon une grille régulière, on pondère en **volume**.
- Il en va de même lorsqu'on décide d'extraire le grain qui contient l'origine.

- *Stéréologie*

- la pondération en **surface** sur les sections planes exprime une pondération en **volume** des objets 3-D correspondants.



- *Cas des distributions de cordes*

Dans la granulométrie des cordes, chaque intercept est compté pour 1 :

F(h) pondère donc en nombre.

L'ouvert est par contre l'ensemble des points où passe un intercept $\geq h$:

G(h) pondère donc en mesure.

Granulométries linéaires en nombre et en mesure

- *Moments en nombre*

De la relation $1 - F(h) = P'(h) / P'(0)$, on tire

$$E[h] = \int_0^{\infty} [1 - F(h)] dh = -P(0) / P'(0)$$

et plus généralement

$$E[h^n] = [n(n-1) / -P'(0)] \int_0^{\infty} h^{(n-2)} P(h) dh$$

- *Moments en mesure*

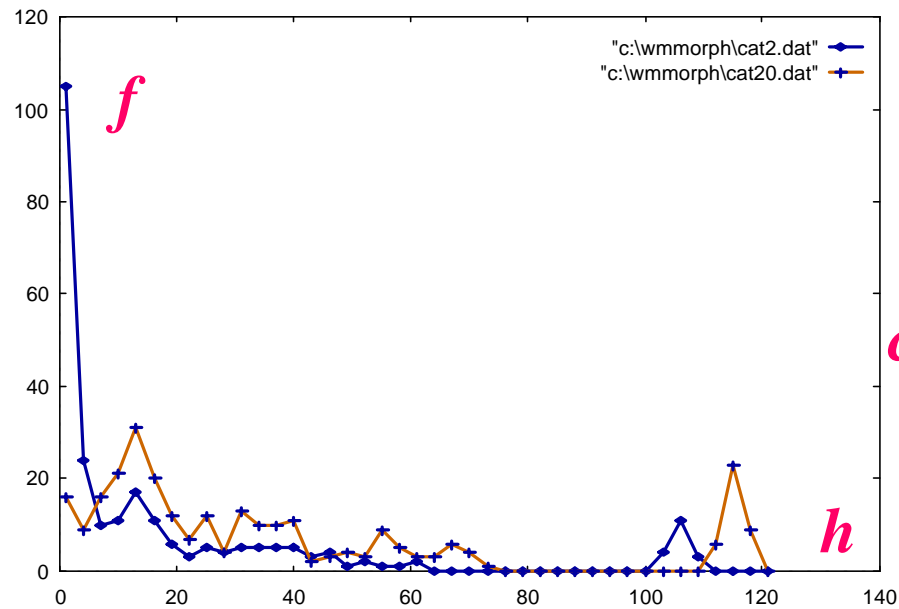
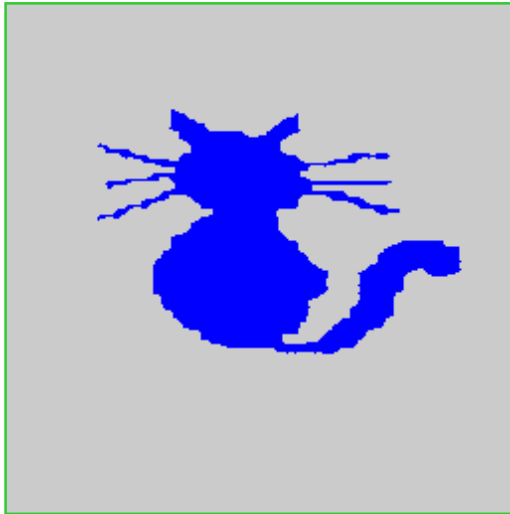
Supposons, pour simplifier, que F et G admettent des densités f et g. Alors :

$$g(h) = h f(h) / E[h]$$

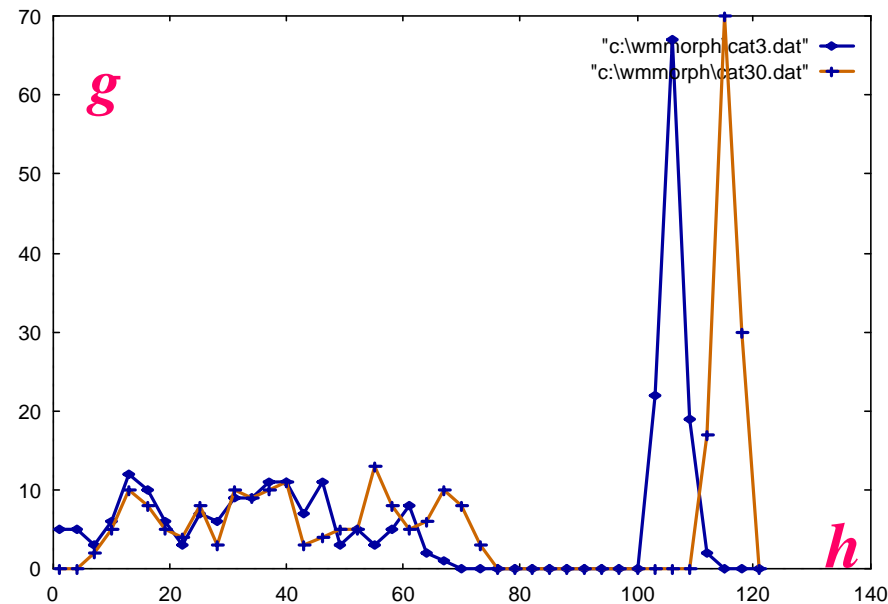
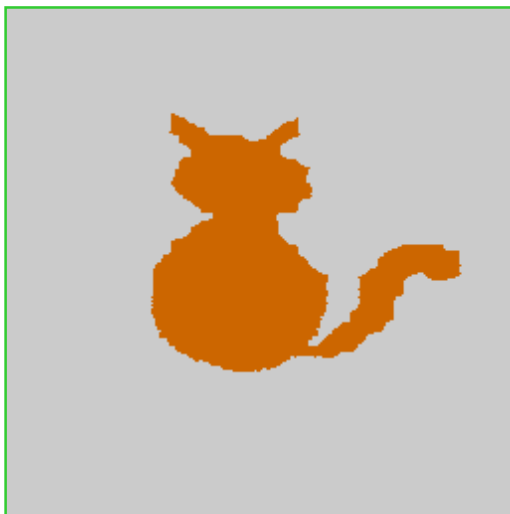
l'expression du moment en mesure $\mathcal{M}[h^n] = \int_0^{\infty} h^n g(h) dh$ s'en déduit, et

$$\mathcal{M}[h^n] = [n(n+1) / P(0)] \int_0^{\infty} h^{(n-1)} P(h) dh$$

Exemple de distributions $f(h)$ et $g(h)$



f(h) voit qu'on a coupé les moustaches du chat,



...mais g(h) voit qu'il a mangé une souris !

Passage au cas stationnaire

- *Mesure \Rightarrow pourcentage*

Pour passer en mode stationnaire, il suffit de remplacer la mesure de l'érodé linéaire par le **pourcentage volumique** de l'érosion, *i.e.* de diviser $P(h)$ par l'unité de volume (ou de surface, ou de longueur).

Comme cette unité est une constante, toutes les interprétations ci-dessus restent valables. On gardera donc le symbole $P(h)$, par simplicité.

- *Grains et pores*

la version stationnaire permet de faire jouer un rôle symétrique à l'érodé $Q(h)$ des pores. Si h_1 et h_0 sont affectés aux grains et aux pores, il vient

$$P(0) = L_L(X) = E [h_1] / E [h_0 + h_1] \quad ; \quad Q(0) = L_L(X^c) = E [h_0] / E [h_0 + h_1]$$

$$- P'(0) = - Q'(0) = N_L(X) = N_L(X^c) = 1 / E [h_0 + h_1]$$

L'étoile

- **Définition**

Prenons pour X les pores et affectons à tout point $x \in X$ l'ensemble Y_x des points $y \in X$ vus directement à partir de x . La mesure

$$\text{Mes}(Y_x) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{Ind}_x(y) dy \quad [\text{Ind}_x(y) : \text{indiatrice de } Y_x]$$

admet une espérance que l'on nomme **l'étoile $St(X)$** .

- **Calcul**

$$E [\text{Mes}(Y_x)] = \int_{\mathbb{R}^n} \text{Pr} \{y \in X \mid x \in X\} dy = 1 / P(0) \int_{\mathbb{R}^n} P(y - x) dy$$

qui, par stationnarité, ne dépend pas du point x , *i.e.*

$$St(X) = \int P(h) dh / \text{Mes } X \quad .$$

Dans le cas isotrope, il vient

$$- \text{ dans } \mathbb{R}^3 \quad St_3(X) = 4\pi / V_V \int_0^\infty h^2 P(h) dh = \pi/3 \mathcal{M} [h^3]$$

$$- \text{ dans } \mathbb{R}^2 \quad St_2(X) = 2\pi / A_A \int_0^\infty h P(h) dh = \pi/3 \mathcal{M} [h^2]$$

Interprétation géométrique

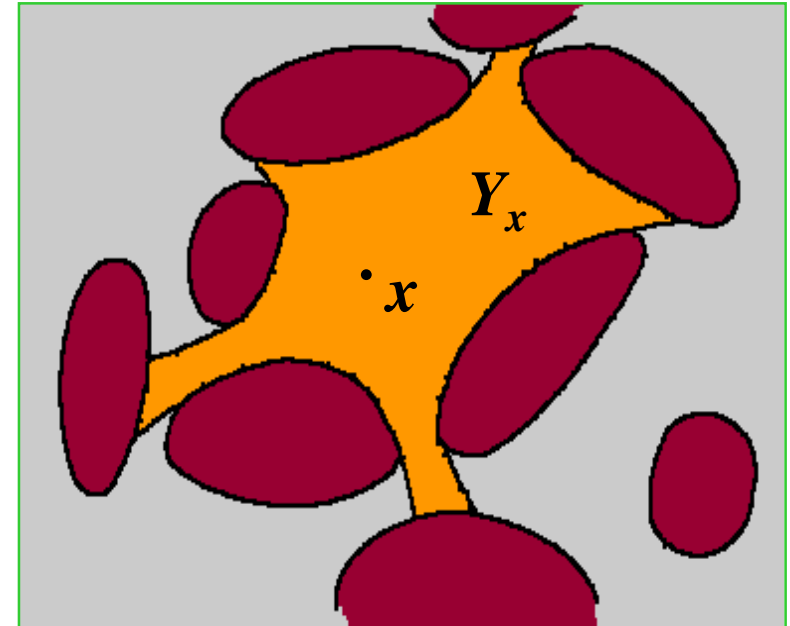
- Considérons une population de **convexes disjoints**. Chaque point x du grain X_i voit la totalité du grain . Dans l'étoile, celui-ci est donc pondéré par sa **mesure**, *i.e.*

dans \mathbf{R}^3 $St_3(\mathbf{X}) = \mathcal{M}[\mathbf{V}] = \pi/3 \mathcal{M}[\mathbf{h}^3]$

dans \mathbf{R}^2 $St_2(\mathbf{X}) = \mathcal{M}[\mathbf{A}] = \pi/3 \mathcal{M}[\mathbf{h}^2]$

- En revanche, quand \mathbf{X} est quelconque, la zone de vision directe Y_x varie en chaque point. C'est le cas d'un milieu poreux.

L'étoile permet alors de définir un **volume moyen** de pores même s'ils sont connectés et de le calculer à partir des sections .



Si l'on suppose une lampe placée en x , la zone directement éclairée Y_x est le poulpe central.

L'étoile des pores (en 2-D) est la surface moyenne du poulpe quand x décrit les pores .

Granulométries de sphères

Fonction de distribution des diamètres

- Quand X représente une population de sphères disjointes, on peut **remonter** de la granulométrie $F_1(h)$ des intercepts à celle $F_3(h)$ de leurs diamètres. La contribution d'une sphère de diamètre D aux cordes $\geq h$ vaut $(\pi/4) (D^2 - h^2)$, d'où, par intégration

$$N_L [1 - F_1(h)] = N_V \int_h^\infty (\pi/4) (D^2 - h^2) F_3(dD)$$

- et en différentiant par rapport à h

$$N_L f_1(h) = N_L F'_1(h) = N_V (\pi/2) h [1 - F_3(h)]$$

Moments

- On en déduit le nombre spécifique des sphères

$$N_V = (2/\pi) N_L f'_1(0)$$

et leurs moments E_3 , \mathcal{M}_3 , en fonction de ceux E_1 , \mathcal{M}_1 , des traversées

$$E_3 (D^n) = [n / f'_1(0)] E_1 (D^{n-2}) \quad ; \quad \mathcal{M}_3 (D^n) = (n+3/3) \mathcal{M}_1 (D^n)$$

Comportement à l'origine (I) : courbure

Courbure moyenne

- Soit $X \in \mathbb{R}^2$ un ensemble admettant une courbure finie en tout point de sa frontière. Considérons un point $x \in \partial X$, de rayon de courbure R et de tangente α . Sa contribution à $F_\alpha(h)$ est proportionnelle à $R - [R - (h/2)]^2 \approx h^2 / 8R$, d'où, si $N_A^+(\alpha)$ est le nombre de convexité des grains en α ,

$$N_L(\alpha) f_\alpha(h) = (N_A^+(\alpha) / 4) E [1/R] \cdot h \quad h \text{ petit}$$

- Lorsque α varie, $N_A^+(\alpha) d\alpha = du/R$ si $R > 0$ et 0 sinon ; la moyenne directionnelle $f_1(h)$ des $N_L(\alpha) f_\alpha(h)$ s'écrit donc

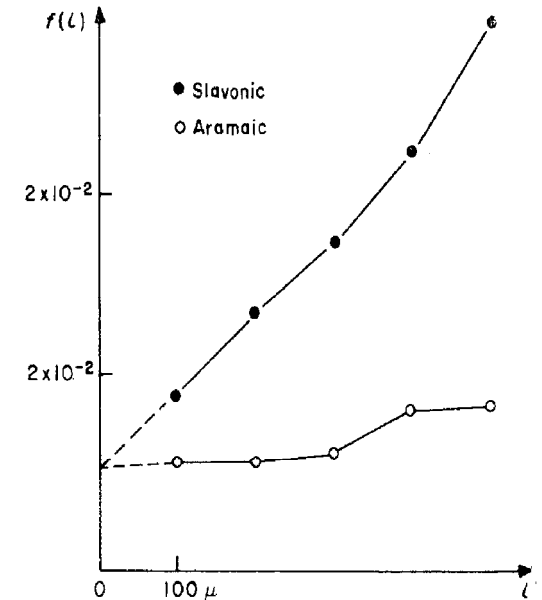
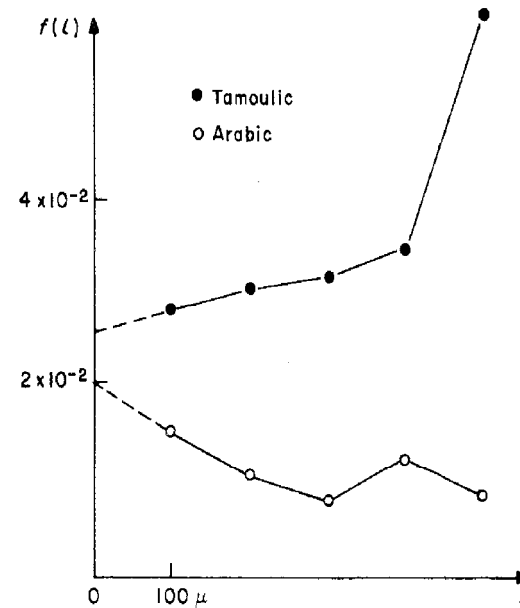
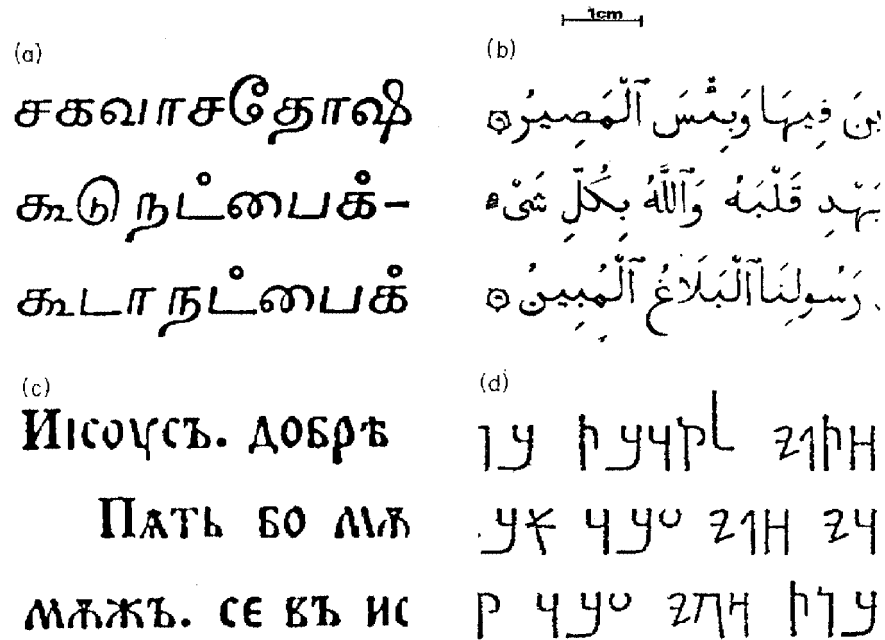
$$f_1(h) = h / 4 \cdot L(\partial X) \int_{R>0} du/R^2 ,$$

En combinant ce résultat avec l'écriture symétrique pour les pores, il vient

$$[f_1(h) + f_0(h)] / 2 = h / 8 \cdot L(\partial X) \int_{\partial X} du/R^2 = \mathbf{h E(C^2) / 8 = f(h)}$$

Ainsi, pour h petit, l'histogramme $f(h)$ des intercepts est **linéaire** et sa pente égale à la **moyenne quadratique de la courbure** de X divisée par huit .

Exemple: comparaison de quatre écritures



Commentaires :

- L'araméen (d), le tamoul (a) et le slavon (c), vérifient bien le modèle de courbures finies (à un effet de pépité près, du au bruit graphique); et la pente du $f(h)$, à peu près nulle dans le cas de l'araméen à grands méplats, augmente du tamoul au slavon au courbes plus resserrées;
- Le modèle n'est pas vérifié par l'arabe classique, surchargé de ponctuation.

Comportement à l'origine (II) : rugosité

- Lorsqu'on passe à \mathbb{R}^3 le modèle s'étend et met en jeu en chaque point les deux courbure moyenne C et totale C' , associées aux rayons de courbure principaux ρ_1 et ρ_2

$$C = 0,5(1/\rho_1 + 1/\rho_2) \quad ; \quad C' = 1/\rho_1 \rho_2$$

- Au voisinage de l'origine, $f(h)$ se développe en

$$f(h) = E(3C^2 - C') / 8 \cdot h$$

Deux cas sont intéressants:

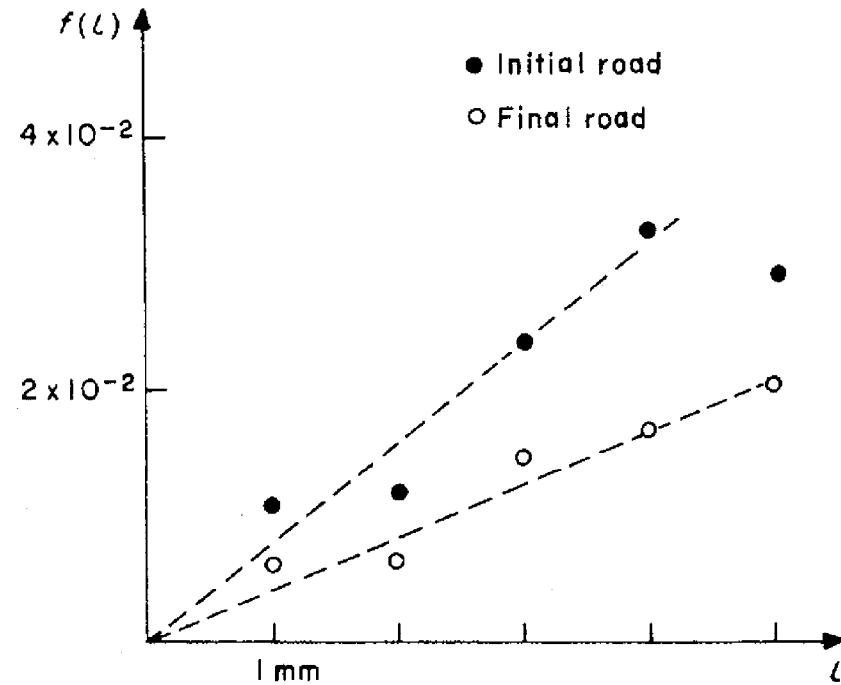
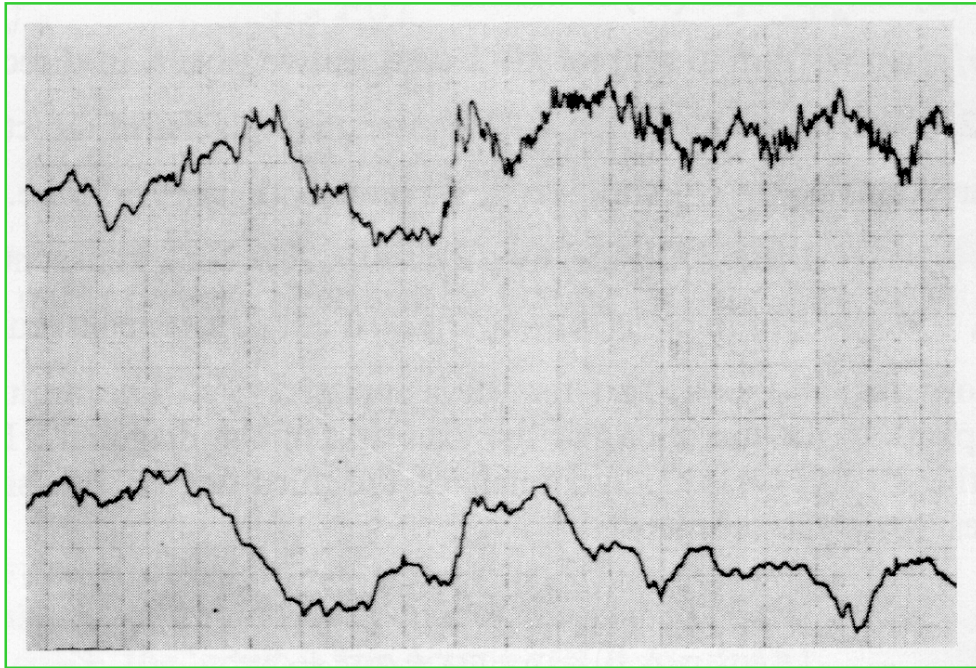
- L'ensemble X est formé de particules disjointes et homéomorphes à des boules, en nombre volumique N_v , alors

$$f(h) = E(3C^2 - 4\pi N_v) / 8 \cdot h$$

- X est le sous graphe d'une fonction numérique; le terme en C' s'évanouit et

$$f(h) = 3/8 E(C^2) \cdot h$$

Exemple de rugosité



Etude de l'usure d'un revêtement routier :

- On a simulé en manège 1.000 puis 10.000 passages de camions de 6,5 tonnes à 65km/h;
- D'après la formule précédente, et après avoir mesuré $f(h)$ dans 6 directions, il vient :

$$\mathbf{E(C^2) = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^{-2} \text{ avant usure ;} \quad \mathbf{E(C^2) = 10^{-2} \text{ mm}^{-2} \text{ après usure .}}$$

Il est remarquable qu'un modèle aussi régulier apporte encore une information pertinente ici.

Références sur l'érosion linéaire et la covariance (I)

Sur les covariances binaires et multiphasées et sur l'érosion linéaire

- **J. Serra** (1966) Remarques sur une lame mince de minerai lorrain *Bul. du BRGM* **6**, 1-36
- **A. Haas, G. Matheron et J. Serra** (1967) Morphologie mathématique et granulométries en place. *Ann. Mines* **11**, 736-753 et **12**, 767-782.
- **D. Jeulin** (1979) Morphologie mathématique et propriétés physiques des agglomérés de minerais de fer et du coke métallurgique. *Thèse doct. ing. Ecole des mines, Paris*
- **A. Greco, D. Jeulin, J. Serra** (1979) The use of the texture analyser to study sinter structure *J. of Micr.* **116**, part 2
- **M. Coster, J.L. Chermant** (1989) Précis d'Analyse d'Images, *Les Presses du CNRS (1985); 2nd Edition*, Les Editions du CNRS.

Sur les ensembles aléatoires :

- **G. Matheron.** (1967) Eléments pour une théorie des milieux poreux *Masson, Paris.*
- **G. Matheron** (1975) Random Sets and Integral Geometry, *Wiley, N.Y.*
- **D. Jeulin.** (1991) Modèles morphologiques de structures aléatoires et de changement d'échelle. *Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques, Caen.*

Références sur l'érosion linéaire et la covariance (II)

Sur la rugosité :

- **J. Serra** (1984) Descriptors of flatness and roughness *J. of Micr.***134**, 227-243
- **M. Coster, J.L. Chermant** (1983) Recent developments in quantitative metallography. *Int. Metal Rev.* **28**, 228-241

Sur la théorie intrinsèque :

- **G. Matheron** (1965) Les variables régionalisées et leur estimation, *Masson*, Paris

Sur les modèles de dilution et de marches poissonniennes :

- **J. Serra** (1982) Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol.1 *Acad. Press*, London
- **G. Matheron** (1970) La théorie des variables régionalisées, et ses applications, *cahiers du CMM fasc.5, Ecole des mines Paris*

Sur les exemples :

- **S. Beucher, J. Serra** (1999) Micromorph, logiciel de Morphologie Mathématique, *Transvalor Paris*