

# RESIDUS

**Serge BEUCHER**  
**Centre de Morphologie**  
**Mathématique**  
**Mines ParisTech**

# Introduction: propriétés des transformées morphologiques

- Croissance

$$X \subset Y \Rightarrow \psi(X) \subset \psi(Y)$$

- Extensivité/anti-extensivité

$$X \subset \psi(X)$$

$$\psi(X) \subset X$$

- Idempotence

$$\psi(\psi(X)) = \psi \circ \psi(X) = \psi(X)$$

Les opérateurs résiduels ne sont pas croissants.  
Beaucoup conservent les propriétés d'idempotence et d'anti-extensivité. Certains vérifient une autre propriété: l'homotopie

# Définition générale d'un résidu

Un opérateur résiduel élémentaire est un opérateur construit à l'aide de la différence de deux opérateurs

-Différence ensembliste pour les ensembles

$$r = \psi \setminus \zeta \quad \zeta \subset \psi$$

-Différence algébrique pour les fonctions

$$r = \psi - \zeta \quad \psi \geq \zeta$$

$r$  s'appelle résidu,  $\psi$  et  $\zeta$  les primitives

Il existe différentes manières d'utiliser et d'assembler ces résidus, en particulier lorsqu'ils sont générés par des familles  $\{\psi_i\}$  et  $\{\zeta_i\}$  de primitives

# Plan du cours

- Résidus ensemblistes
  - Erodé ultime
  - Squelette par boules maximales
  - Bissectrice conditionnelle
  - Résidus géodésiques
- HMT, amincissements, épaisissements
  - Définitions
  - Amincissements homotopiques
  - Squelettes
- Résidus numériques
  - Extension de la notion aux fonctions
  - Ouvert ultime
  - Boules critiques
  - Quasi-distance

# Première Partie

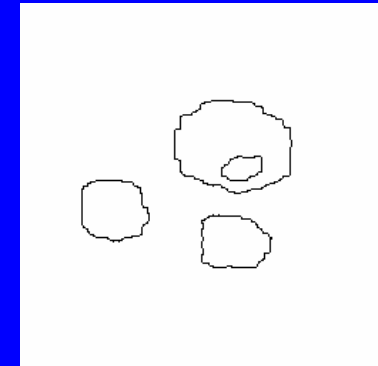
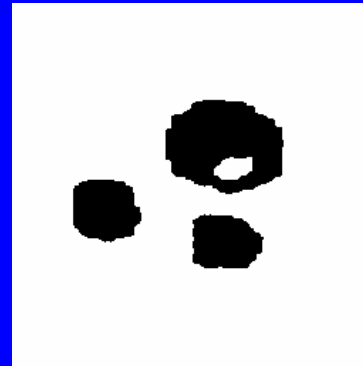
# Résidus en Morphologie Ensembliste

Opérateurs basés sur la différence de deux familles d'opérateurs dépendant d'un paramètre  $i$ :

$$r_i = \psi_i \setminus \zeta_i, \quad \psi_i \geq \zeta_i \quad \theta = \bigcup_{i \in I} r_i$$

## Exemple trivial:

- Si  $I = \{1\}$  (la famille d'opérateurs est réduite à une seule paire), en prenant  $\psi = I$  et  $\zeta = \varepsilon$  (érosion élémentaire), on a:  $r = I \setminus \varepsilon$ , contour intérieur de l'ensemble
- Si  $\psi_i = \varepsilon_i$  et  $\zeta_i = \varepsilon_{i+1}$ ,  $\theta = I$



(l'intersection des résidus produit également une transformation résiduelle, mais elle est élémentaire,  $\psi \setminus \zeta$ )

# Résidus en Morphologie Ensembliste

## Exemples moins triviaux:

- Erodé ultime

$$\psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma_{rec}(\varepsilon_i)$$

- Squelette par boules maximales:

$$\psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma(\varepsilon_i)$$

- Bissectrice conditionnelle

$$\psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \delta_{\varepsilon_i}^l \circ \varepsilon_k(\varepsilon_i)$$

Ces opérateurs sont constitués d'un doublet:

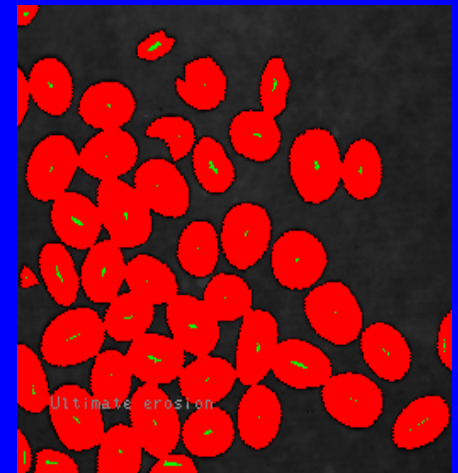
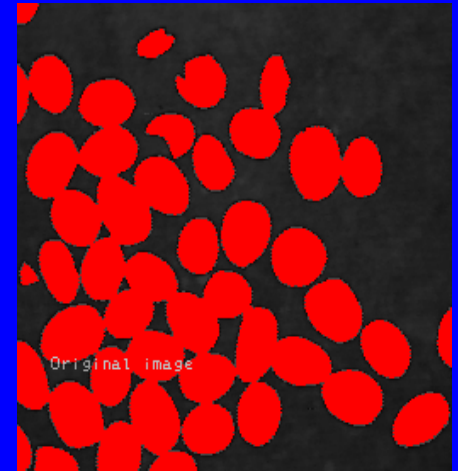
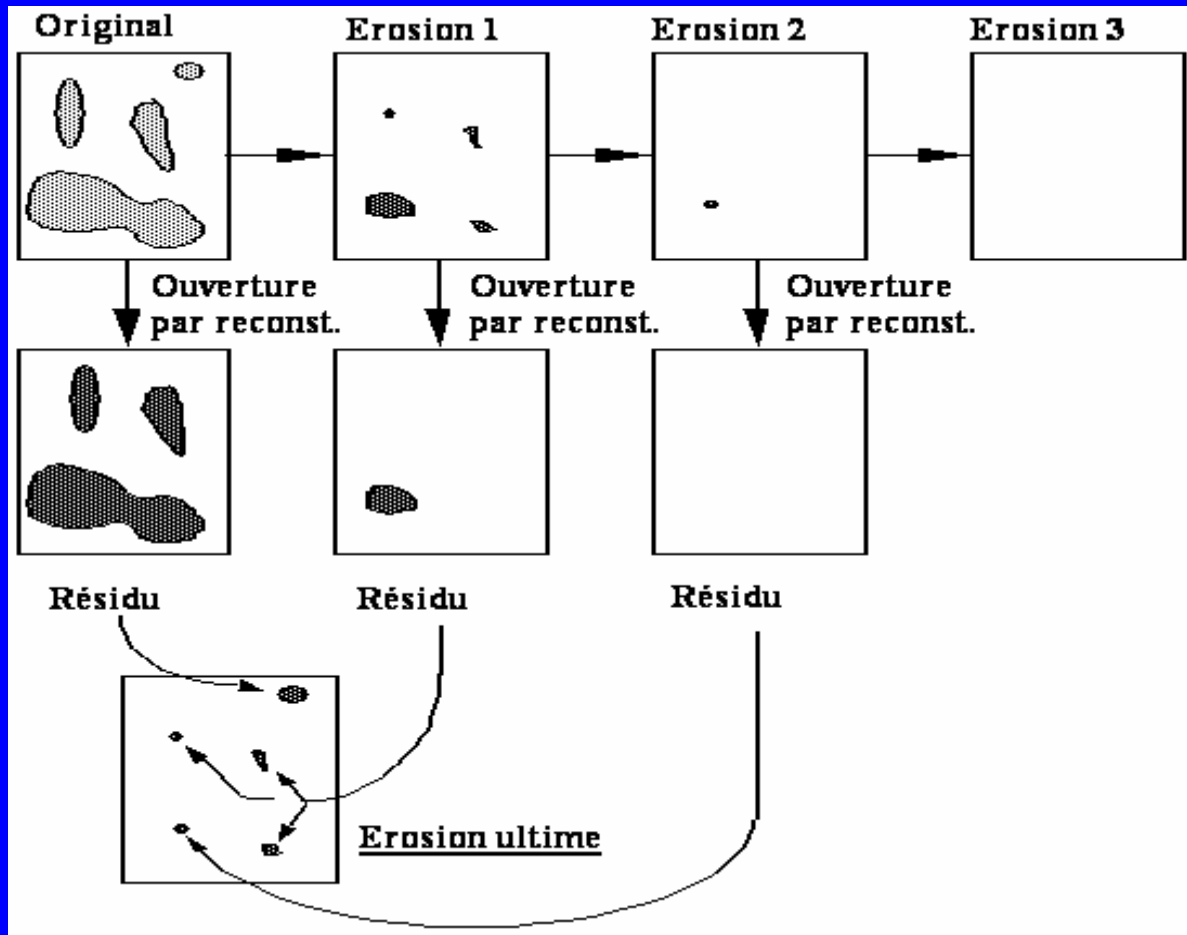
- La transformation ensembliste  $\theta$
- Une fonction associée  $q$ :  $q(x) = i + 1$  si et seulement si  $x \in r_i$

(On ajoute 1 à  $q(x)$  afin d'obtenir une valeur strictement positive sur le support de la fonction)

# Érosion ultime

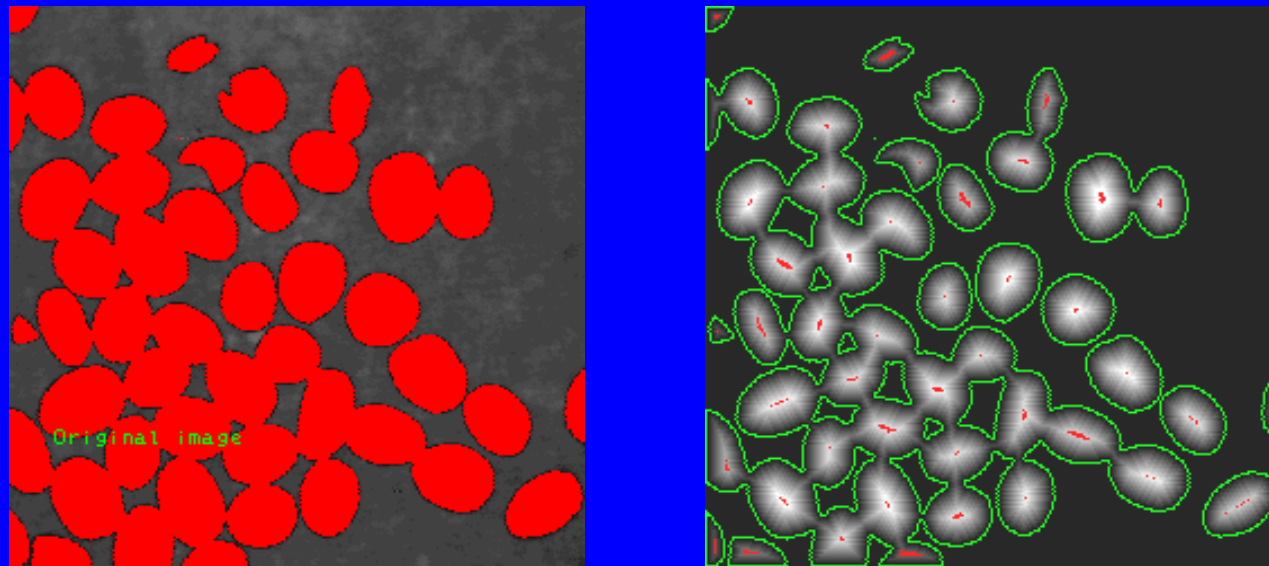
Les deux familles d'opérateurs sont constituées des érodés successifs de l'ensemble et de l'ouverture par reconstruction de chaque érodé

$$\psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma_{rec}(\varepsilon_i)$$



# Erosion ultime et fonction distance

La fonction distance est construite par empilement des érodés successifs de  $X$

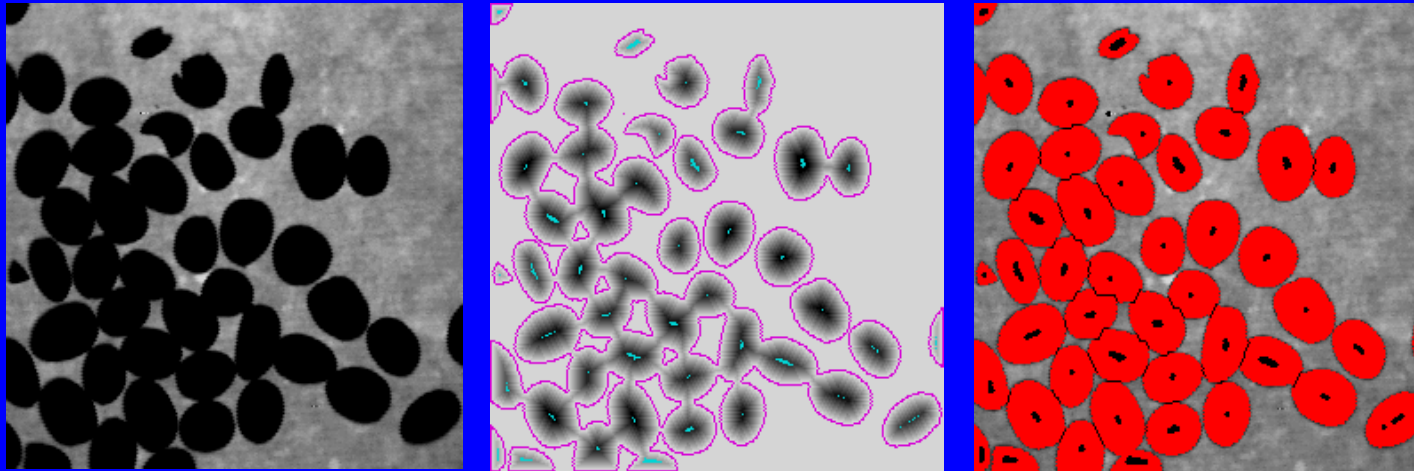


L'érodé ultime correspond alors aux maxima de cette fonction distance

La fonction associée  $q$  donne (à une unité près) la taille de l'érosion correspondant à l'apparition de chaque composant connexe de l'érodé ultime

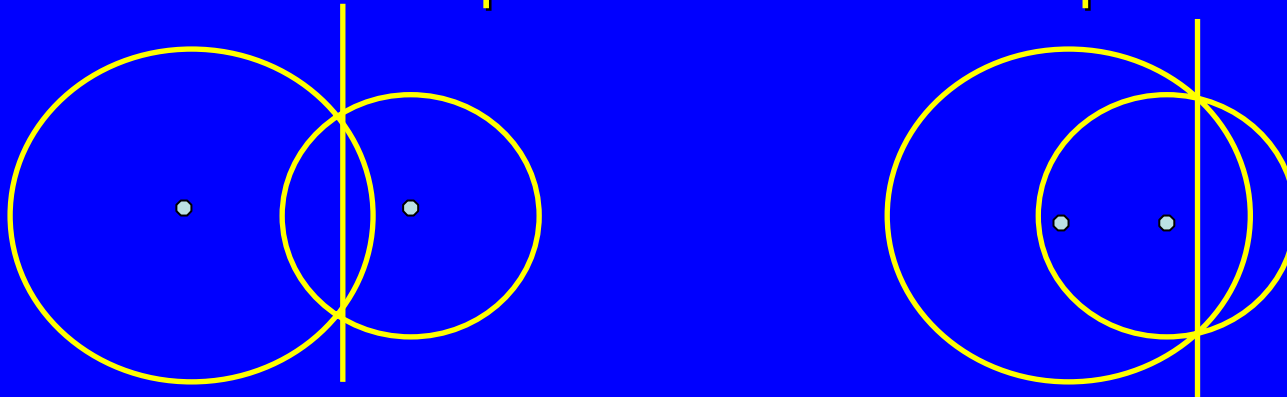
# Usage de l'érodé ultime

- Génération de marqueurs pour la segmentation



La fonction distance de l'ensemble est inversée et sa LPE est construite. L'ensemble marqueur est constitué des maxima de la fonction distance.

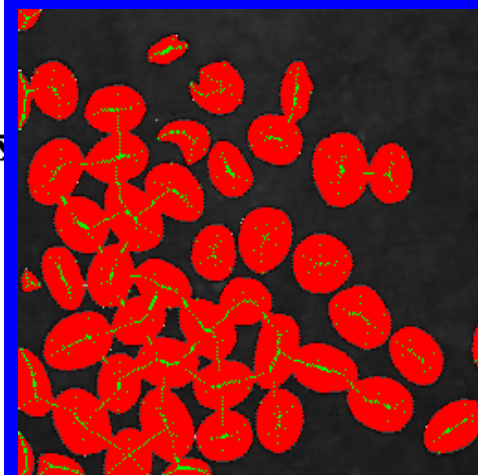
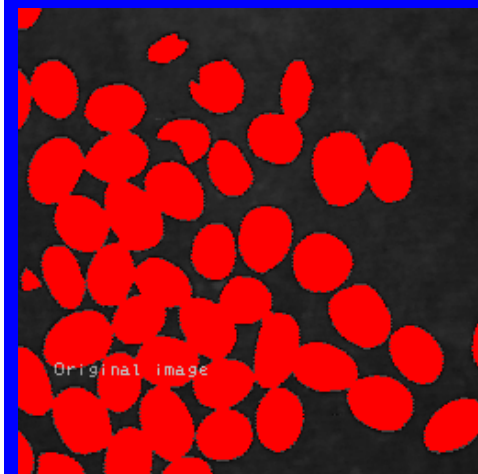
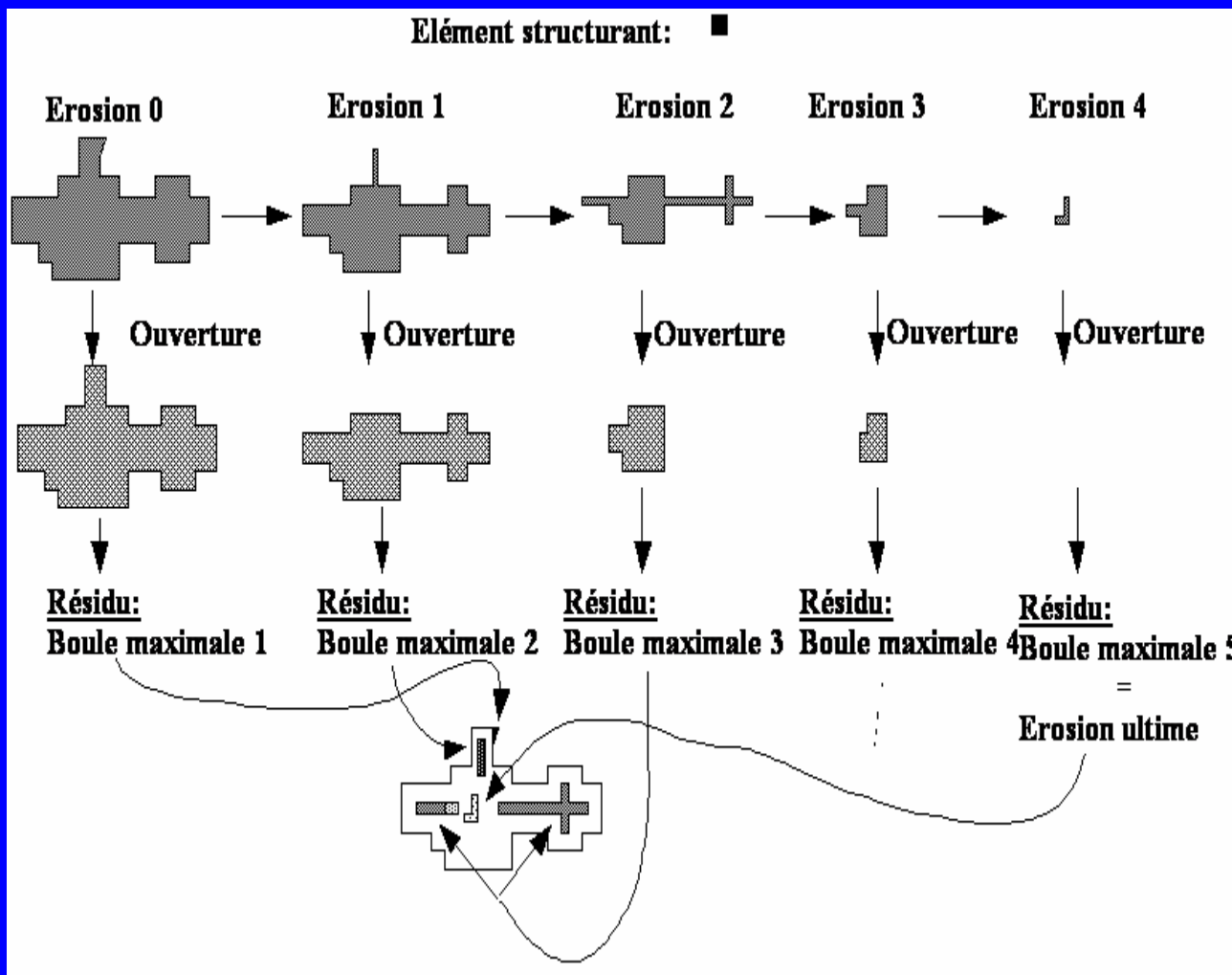
- Problème de la séparation de deux disques imbriqués



# Squelette par ouvertures

(ou squelette par boules maximales)

$$\psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma(\varepsilon_i)$$



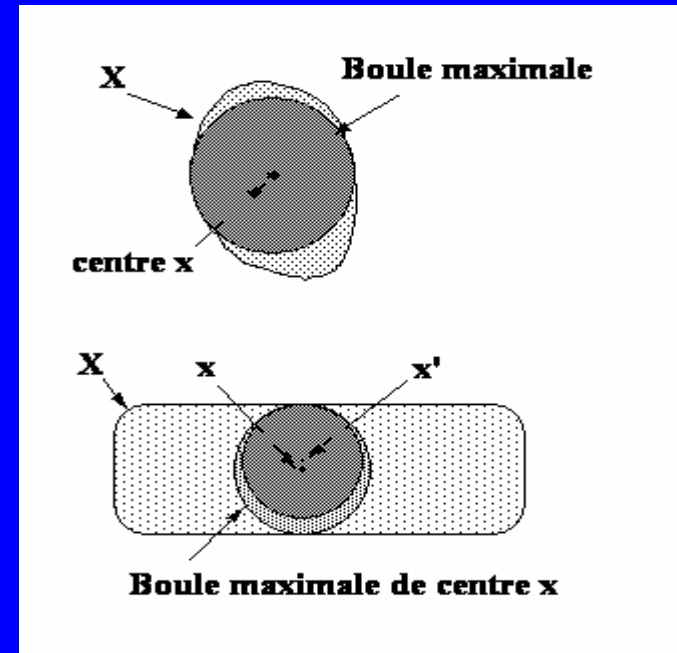
# Boules maximales

Une boule  $B_n(x)$  de taille  $n$  et de centre  $x$  est maximale vis à vis de l'ensemble  $X$ , s'il n'existe aucun autre indice  $k$  et aucun autre centre  $y$  tels que:

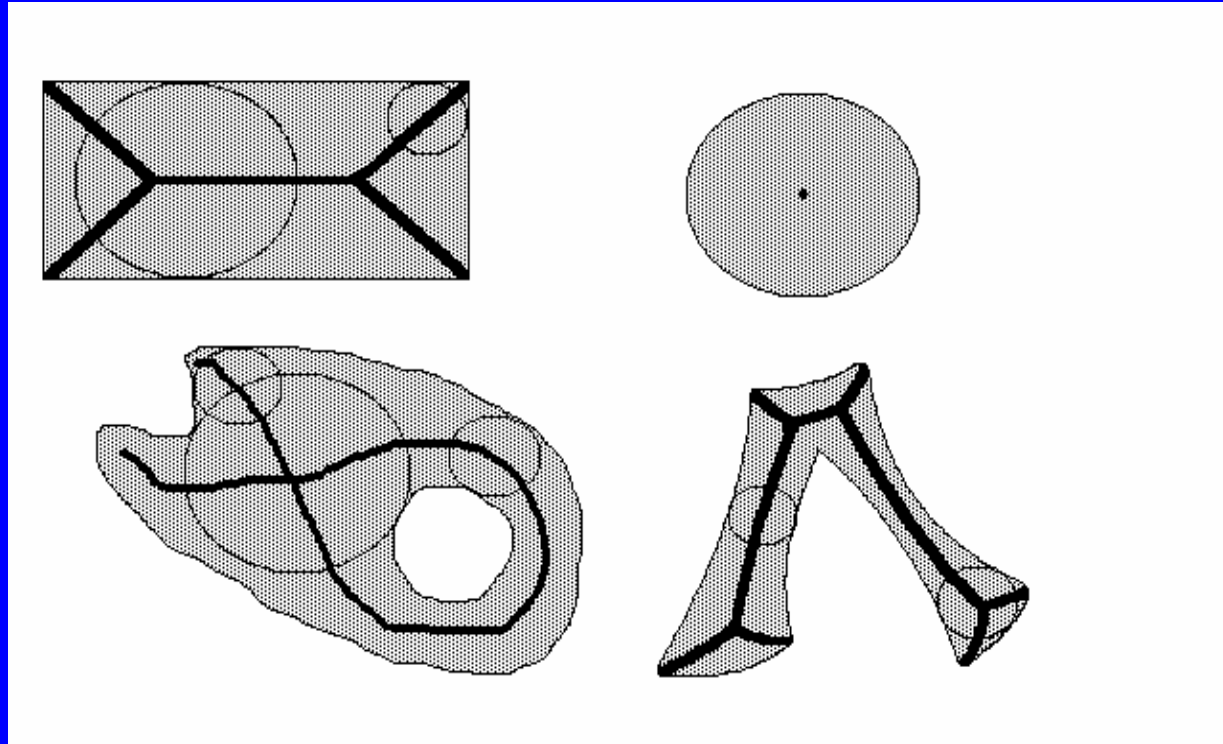
$$B_n(x) \subset B_k(y) \subset X \quad n \leq k$$

Le squelette d'un ensemble  $X$  selon une famille de boules  $\{B_n\}$  est le lieu géométrique des centres de toutes ses boules maximales:

$$S(X) = \{x \in X : \exists B_n(x) \text{ maximale} \}$$



# Squelette par boules maximales



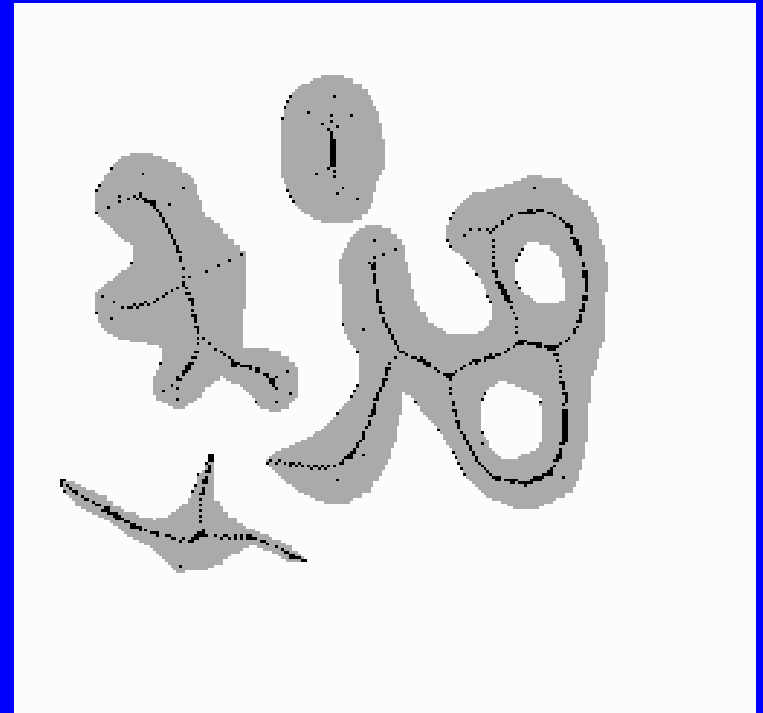
A chaque point  $x$  du squelette, on peut associer une fonction  $q(x)$  prenant la valeur du rayon de la boule maximale implantée au point  $x$ . Cette fonction est appelée fonction d'étanchéité ou fonction d'extinction

$$q(x) = n : x \in S(X), B_n(x) \text{ maximale}$$

# Squelette par boules maximales et par ouvertures

On peut montrer que le squelette par boules maximales et le squelette par résidus d'ouvertures sont identiques.

$$S(X) = \bigcup_{i \in N} [\varepsilon_i(X) \setminus (\gamma \circ \varepsilon_i(X))]$$



- Chaque résidu  $r_i$  (noté aussi  $S_i$ ) est le lieu des centres des boules maximales de rayon  $i$
- Les boules maximales sont définies sur les familles homogènes de boules obtenues par les dilatations successives de la boule élémentaire  $B_0$

# Propriétés du Squelette par boules maximales

- Le squelette par boules maximales d'un ensemble connexe n'est pas connexe (d'une manière générale la connexité du squelette n'est pas avérée)
- Le squelette est anti-extensif et idempotent. Il n'est pas croissant:

$$S(X) \subset X$$

$$S(S(X)) = S(X)$$

$$X \subset Y \text{ n'implique pas } S(X) \subset S(Y)$$

Cependant la propriété suivante est vraie:

$$S(\varepsilon^n(X)) \subset S(X), \forall n \geq 0$$

# Propriétés du Squelette par boules maximales

- Contrairement à la plupart des opérateurs morphologiques, la squelettisation est une opération inversible.

L'ensemble  $X$ , ainsi que ses érodés, ses dilatés et ses ouverts, peuvent être construits à partir du squelette et de la fonction d'extinction:

$$X = [X \setminus \gamma(X)] \cup \gamma(X) = S_0(X) \cup \delta(S_1(X)) \cup \delta^2(S_2(X)) \cup \dots$$

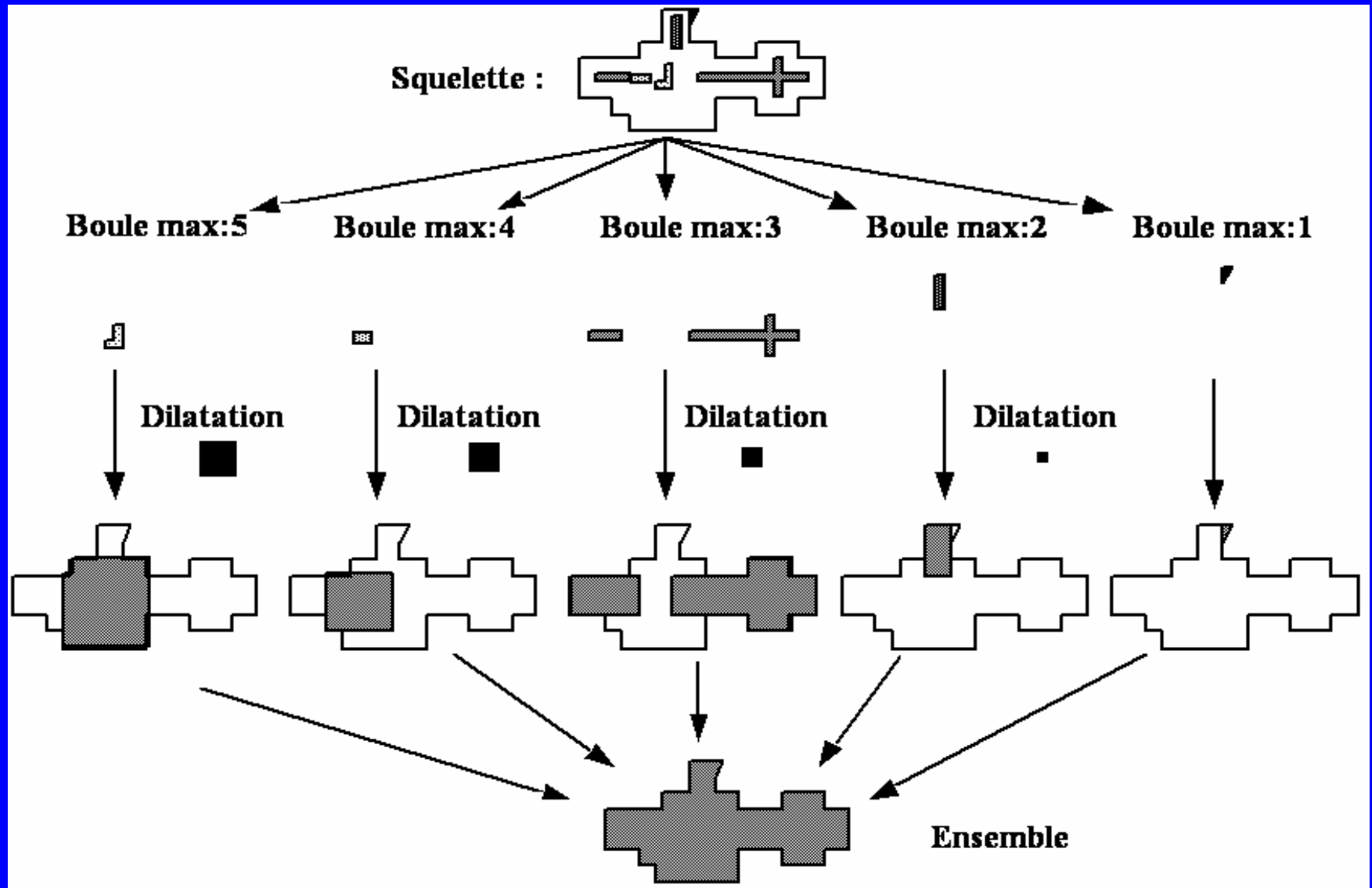
d'où, finalement:

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \delta^i(S_i(X))$$

La transformation, réversible, fournit une autre représentation de  $X$ :

La donnée de  $X$  ou du doublet  $[S(X), q]$  sont équivalents

# Réversibilité du squelette



# Propriétés (suite)

La donnée de  $S(X)$  et de  $q$  permet de construire également:

• les érosions de  $X$  
$$\mathcal{E}^n(X) = \bigcup_{i \geq n} \delta^{i-n}(S_i(X))$$

• les dilations de  $X$  
$$\mathcal{D}^n(X) = \bigcup_{i \in I} \delta^{i+n}(S_i(X))$$

• les ouvertures de  $X$  
$$\mathcal{O}^n(X) = \bigcup_{i \geq n} \delta^i(S_i(X))$$

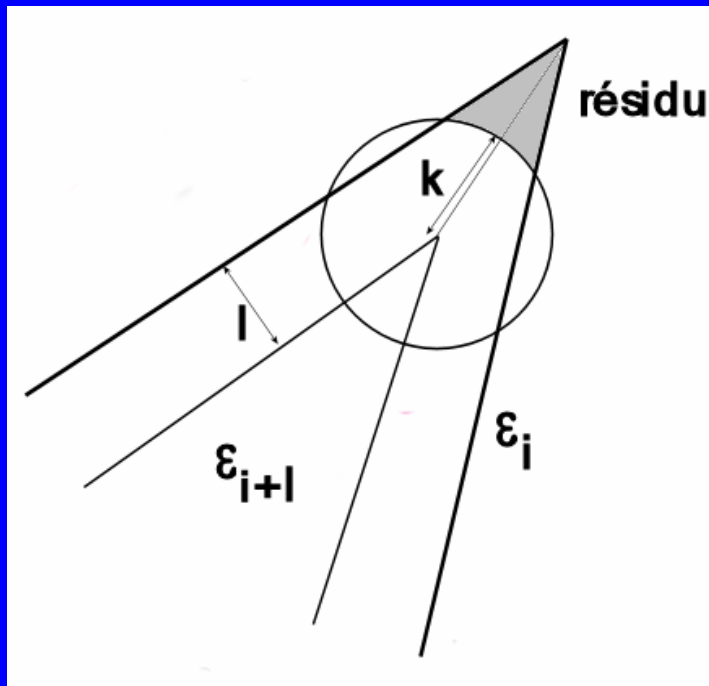
(on ne peut pas reconstruire les fermetures – *Pourquoi?*)

L'érodé ultime est toujours un sous-ensemble du squelette par boules maximales. L'érodé ultime correspond aux centres des boules maximales ultimes.

# Bissectrice conditionnelle

La bissectrice conditionnelle est le résidu entre la famille d'érosions de taille  $l$  et la dilatation géodésique de taille  $k$  ( $k > l$ ) de ces érosions:

$$\psi_i = \varepsilon_i; \zeta_i = \delta_{\varepsilon_i}^k \circ \varepsilon_l(\varepsilon_i)$$



Apparition d'un résidu quand  
 $k < l/\sin(\alpha)$   
 $l/k > \sin(\alpha) = q'(x)$

La bissectrice conditionnelle  
est un seuil sur la dérivée de  
la fonction d'étanchéité

La bissectrice permet une identification plus précise  
des composantes des ensembles que l'érosion ultime

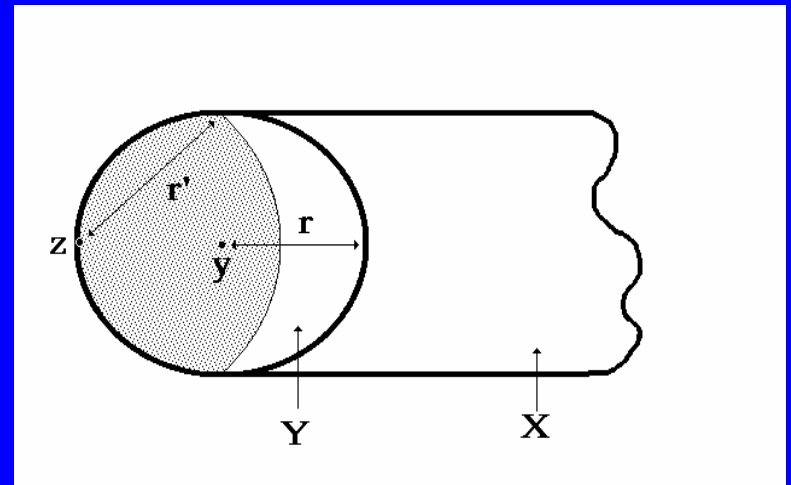
# Résidus géodésiques

Tous les opérateurs résiduels définis dans un contexte euclidien peuvent être transposés dans des espaces géodésiques:

- Les boules géodésiques peuvent être définies à partir de la distance géodésique

$$B_X(x, r) = \{y \in X : d_X(x, y) \leq r\}$$

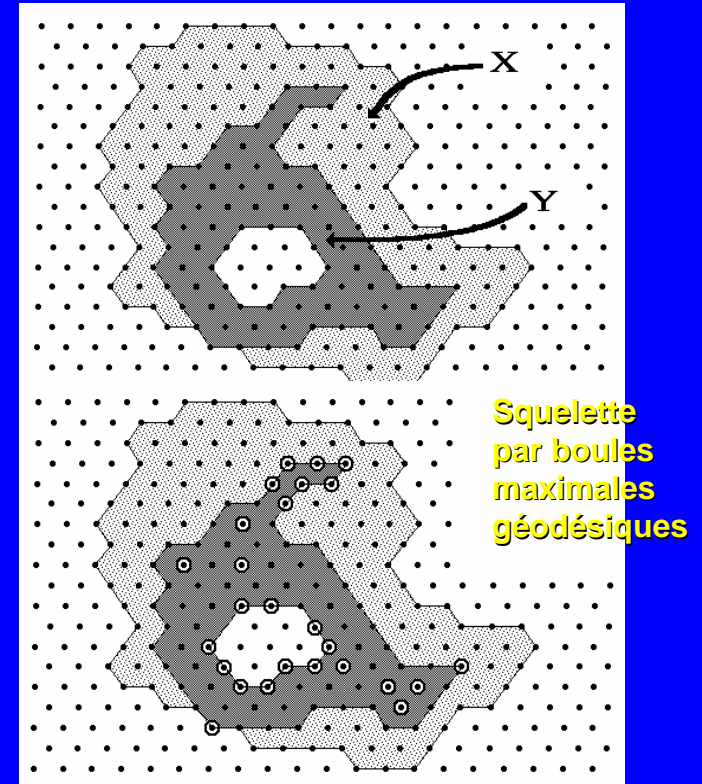
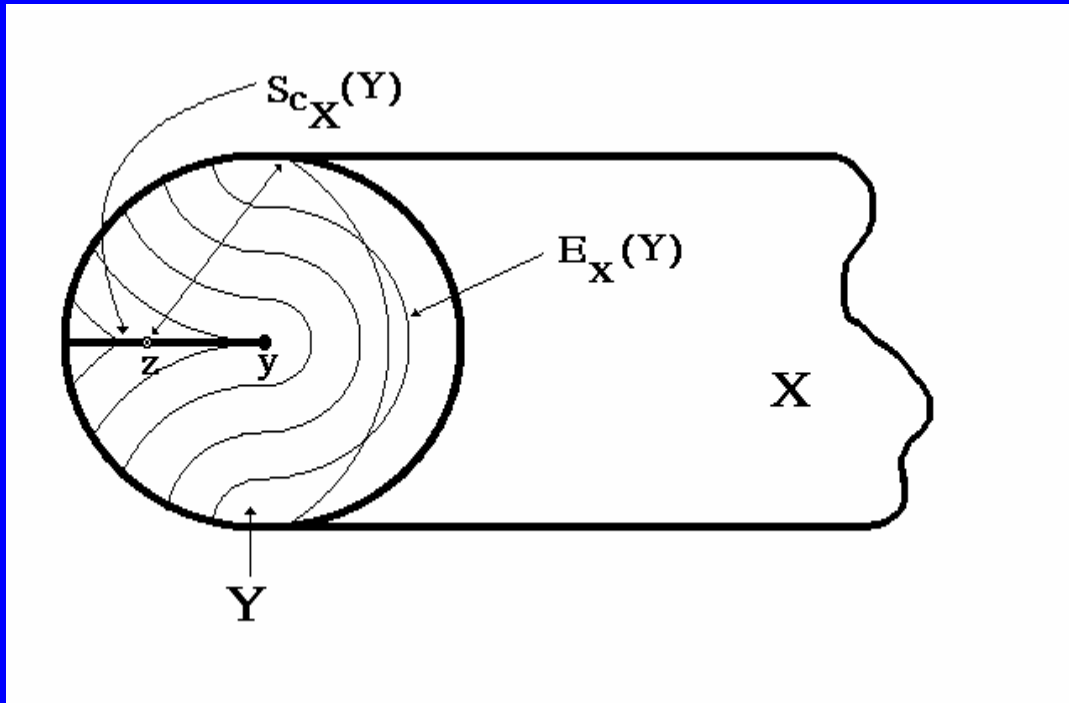
- Les boules maximales géodésiques ont la même définition que les boules maximales euclidiennes (*mutatis mutandis*). Il faut néanmoins éviter certains pièges...



# Squelette géodésique

Le squelette par boules maximales géodésiques  $S_X(Y)$  d'un ensemble  $Y$  inclus dans un espace géodésique  $X$  est défini par:

$$S_X(Y) = \bigcup_{i \in N} \left[ \varepsilon_X^i(Y) \setminus \left( \gamma_X \circ \varepsilon_X^i(Y) \right) \right]$$



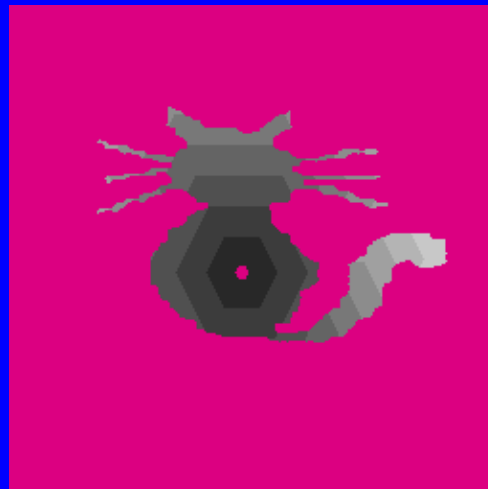
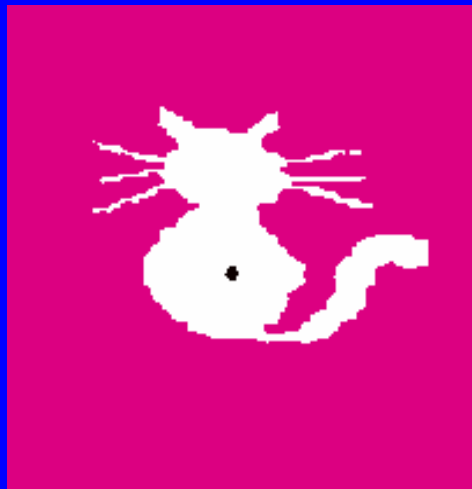
Construction du squelette géodésique

# Extrémités de particule

L'érodé ultime géodésique peut être utilisé pour mettre en évidence les extrémités d'une particule simplement connexe

- On lui associe un *centroïde*  $C$  (à l'aide de l'amincissement  $D_{thin}$ , voir plus loin)
- Les extrémités de la particule sont alors définies comme l'érodé ultime géodésique, dans  $X$ , de l'ensemble  $Y = X \setminus C$

$$Extr(X) = \bigcup_{i \in N} \left[ \varepsilon_X^i(Y) \setminus \left( \gamma^{rec} \left( \varepsilon_X^i(Y); \varepsilon_X^{i+1}(X) \right) \right) \right]$$

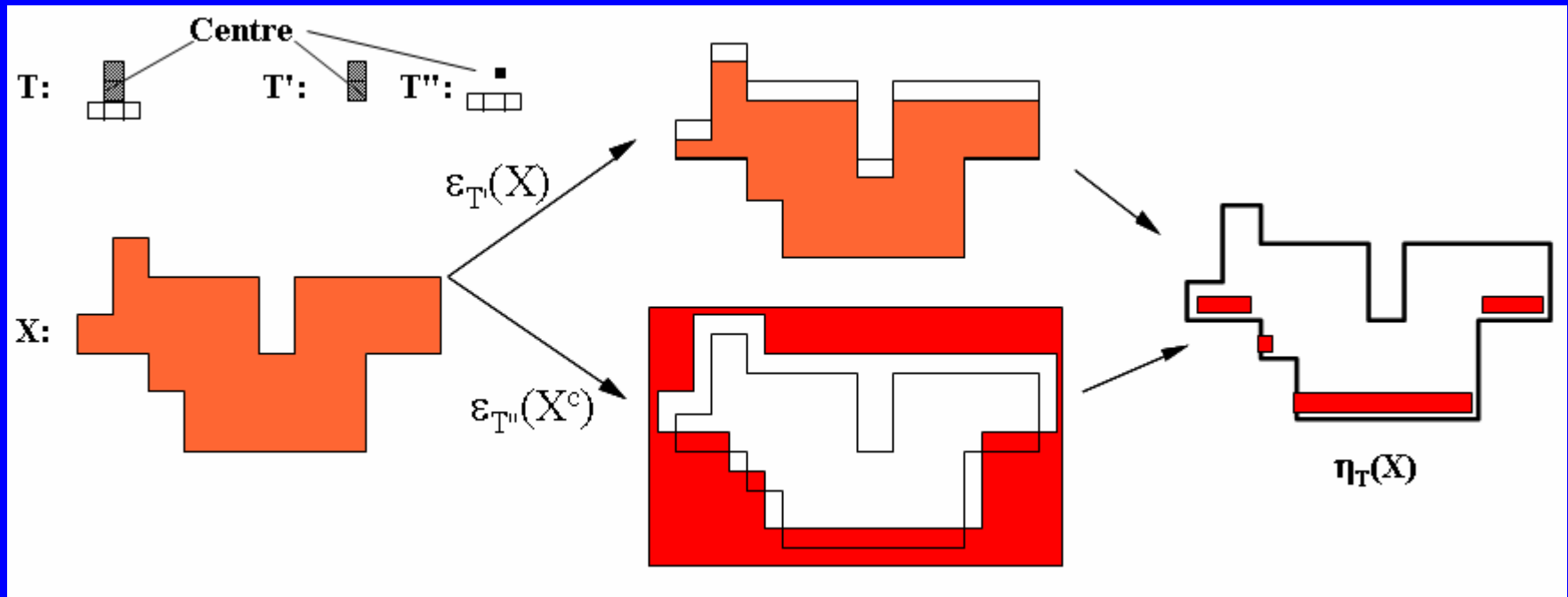


# Deuxième partie

# La transformée en tout ou rien

La transformation en tout ou rien (HMT)  $\eta_T$  généralise à la fois érosion et dilatation, en mettant en jeu le couple d'éléments structurants disjoints  $T = \{T', T''\}$

$$\eta_T(X) = \{x : T''(x) \subset X^c \text{ et } T'(x) \subset X\} = \varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c)$$

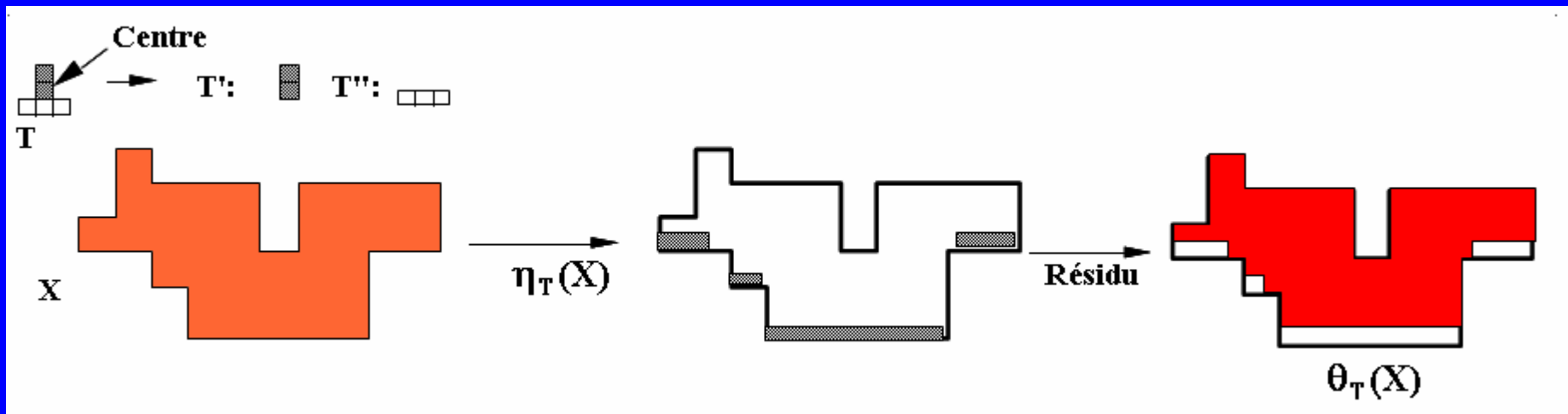


La HMT est un résidu:  $\eta_T(X) = \varepsilon_{T'}(X) \setminus \delta_{T''}(X)$

# Amincissement, épaissement

L'amincissement  $\theta_T$  est le résidu entre l'ensemble initial et sa transformation par tout ou rien :

$$\theta_T(X) = X \setminus \eta_T(X) = X \setminus [\varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c)]$$



L'épaississement  $\xi_T$  est introduit alors par dualité pour le complément:

$$\xi_T(X) = X \cup \eta_T(T) = X \cup [\varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c)]$$

# Propriétés

- L'amincissement selon  $T=(T',T'')$  est le dual pour le complément de l'épaississement selon  $T^*=(T'',T')$  :

$$\theta_T (X) = \left[ \xi_{T^*} (X^c) \right]^c$$

- Tout amincissement est anti-extensif, et tout épaississement extensif. Pour que ces opérations ne se réduisent pas à l'identité, il faut que l'origine de  $T$  appartienne à  $T'$  dans le cas des amincissements ou à  $T''$  pour les épaississements.
- Il existe des amincissements simples. Cependant, les plus utiles sont ceux qui respectent une propriété topologique particulière, l'homotopie.

# Combinaison d'amincissements

On peut combiner les amincissements de deux manières différentes:

- Séquentiellement:

Séquence  $\{T_i\}$  d'éléments structurants

$$\theta_{T_n} \circ \dots \circ \theta_{T_i} \circ \dots \circ \theta_{T_1}$$

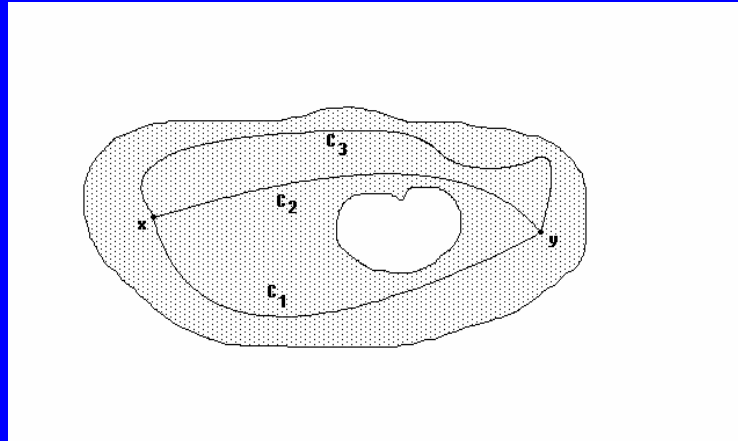
- Sous forme d'unions:

Famille  $\{T_i\}$  d'éléments structurants

$$I \setminus \left( \bigcup_i \eta_{T_i} \right) = I \cap \left( \bigcap_i \eta_{T_i}^c \right) = \bigcap_i (I \setminus \eta_{T_i}) = \bigcap_i \theta_{T_i}$$

# Homotopie

Propriété relative à la déformation de chemins et de lacets



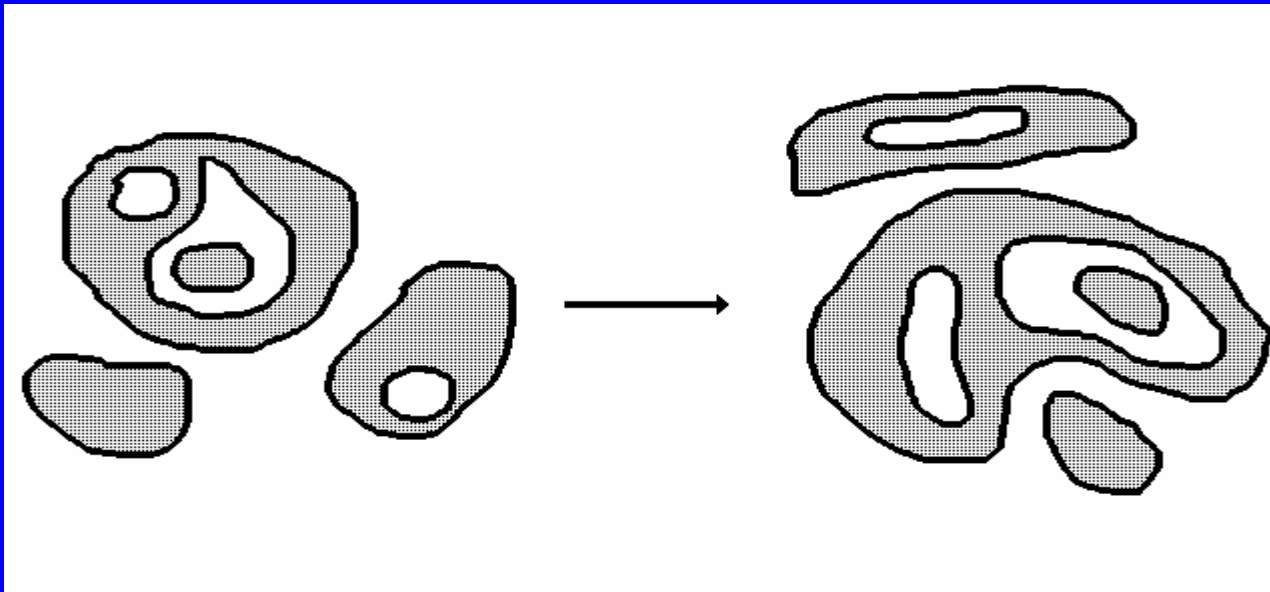
Définition intuitive:

- Deux chemins (ou lacets) d'un espace  $X$  connexe par arc sont homotopes si on peut appliquer de façon continue l'un sur l'autre
- L'homotopie est une relation d'équivalence
- Deux espaces connexes par arcs sont homotopes (homotopiquement équivalents) si on peut appliquer l'un sur l'autre par une suite continue de déformations)

# Transformations homotopiques

Une transformation  $\psi$  est homotopique si l'ensemble de départ  $X$  et d'arrivée  $Y = \psi(X)$  sont homotopes c'est-à-dire s'il existe une transformation bicontinue pour passer de l'un à l'autre, telle que

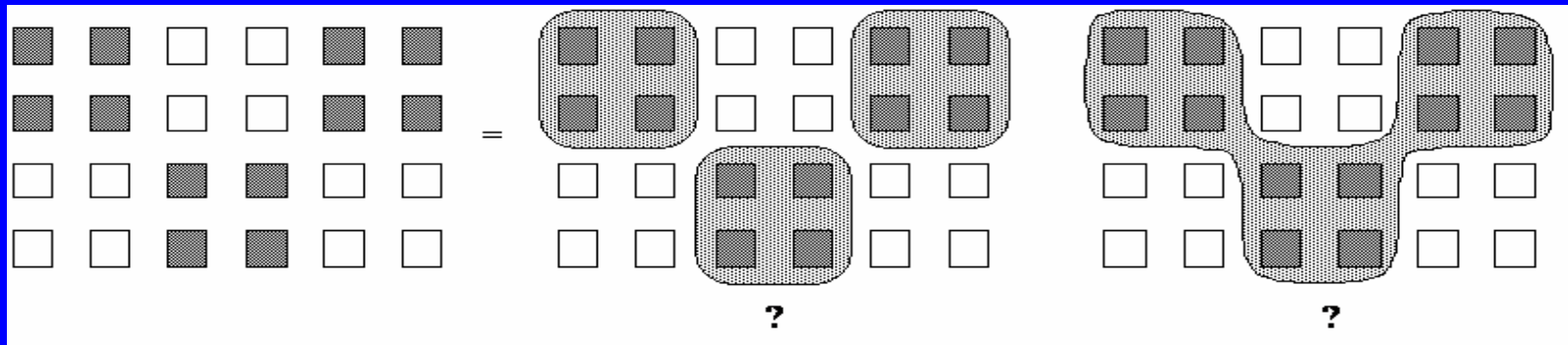
- chaque composante connexe de  $X$  contient le même nombre de trous que son transformé  $Y$ ,
- chaque trou de  $X$  contient le même nombre de composantes connexes que son transformé  $Y$ .



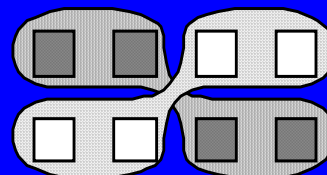
l'homotopie décrit l'organisation des composantes connexes et des trous entre eux.

# Connexité des espaces digitaux

Dans le cas digital, la définition de l'homotopie dépend de la donnée d'une *connexité par arcs*. Or, il n'est pas trivial de définir combien de composantes la figure suivante possède :



Il faut choisir des règles de connexion portant sur les configurations diagonales pour que la connexité réalisée ait une structure de graphe planaire.

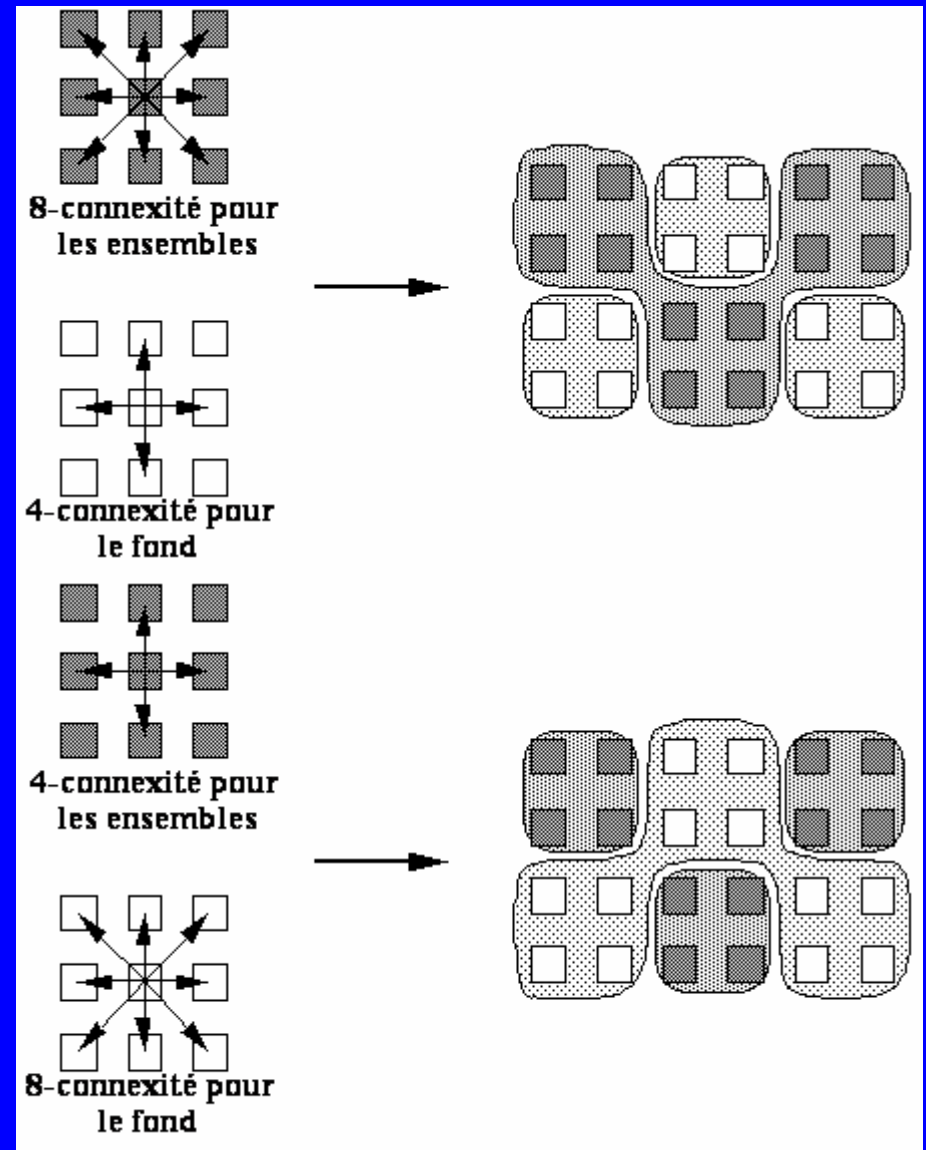


# Connexité et maille carrée

En maille carrée, deux types de connexité sont possibles:

- 8-connexité pour les ensembles et 4-connexité pour le fond
- 4-connexité pour les ensembles et 8-connexité pour le fond

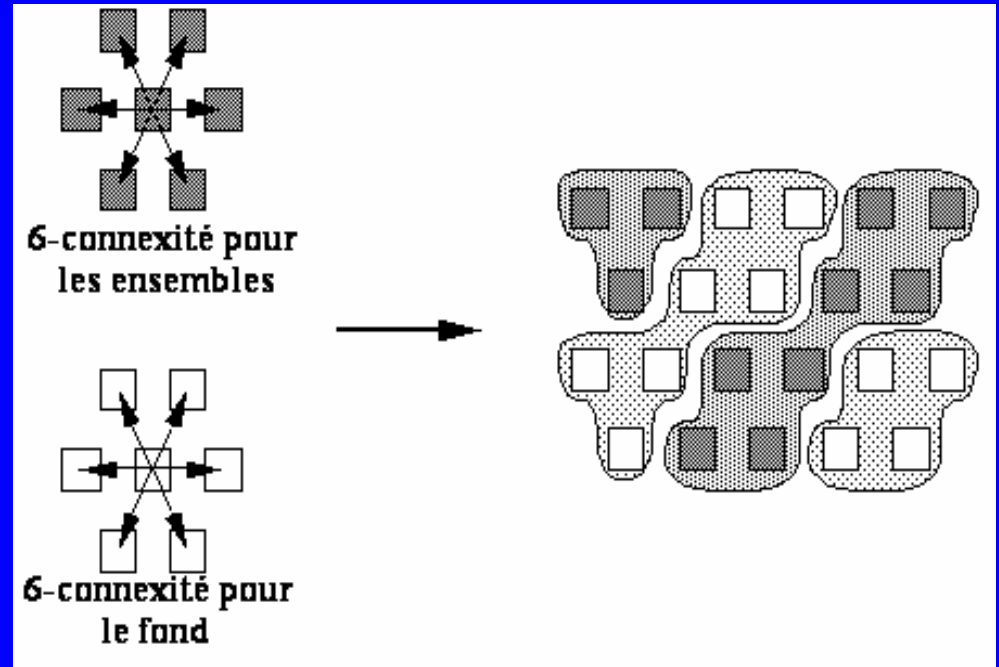
Cette structure est très pénalisante et complique les opérateurs topologiques



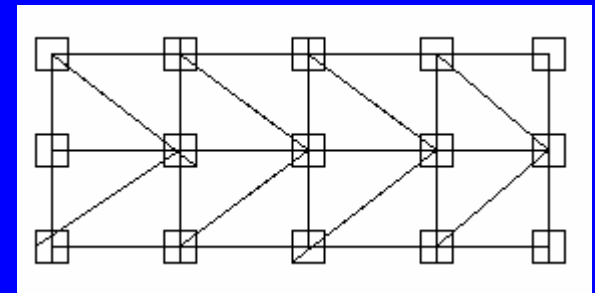
# Connexité en trame hexagonale

En trame hexagonale, on peut définir une 6-connexité  
À la fois pour les formes et pour le fond

Simplification des algorithmes (moins de voisins et configuration auto-duale)



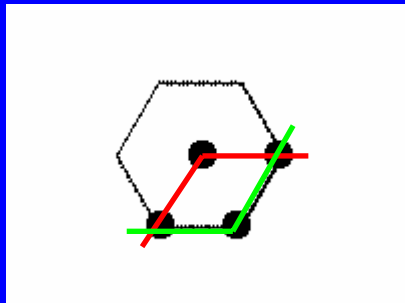
En pratique, la maille hexagonale peut être construite à partir de la maille carrée.



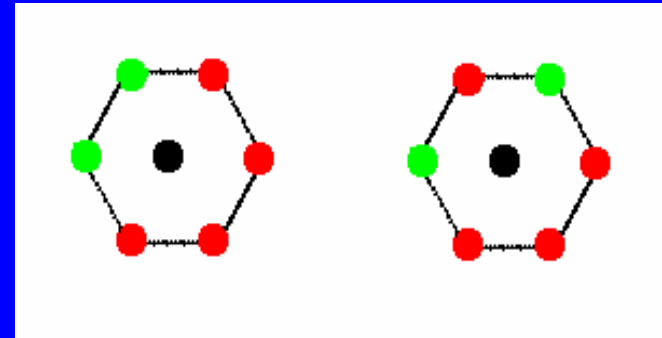
# Amincissements homotopiques

On peut analyser toutes les configurations d'éléments structurants  $T$  définissables (aux rotations, symétries près) sur la boule élémentaire et déterminer lesquels préservent l'homotopie des chemins passant dans la boule

## Cas de la trame hexagonale



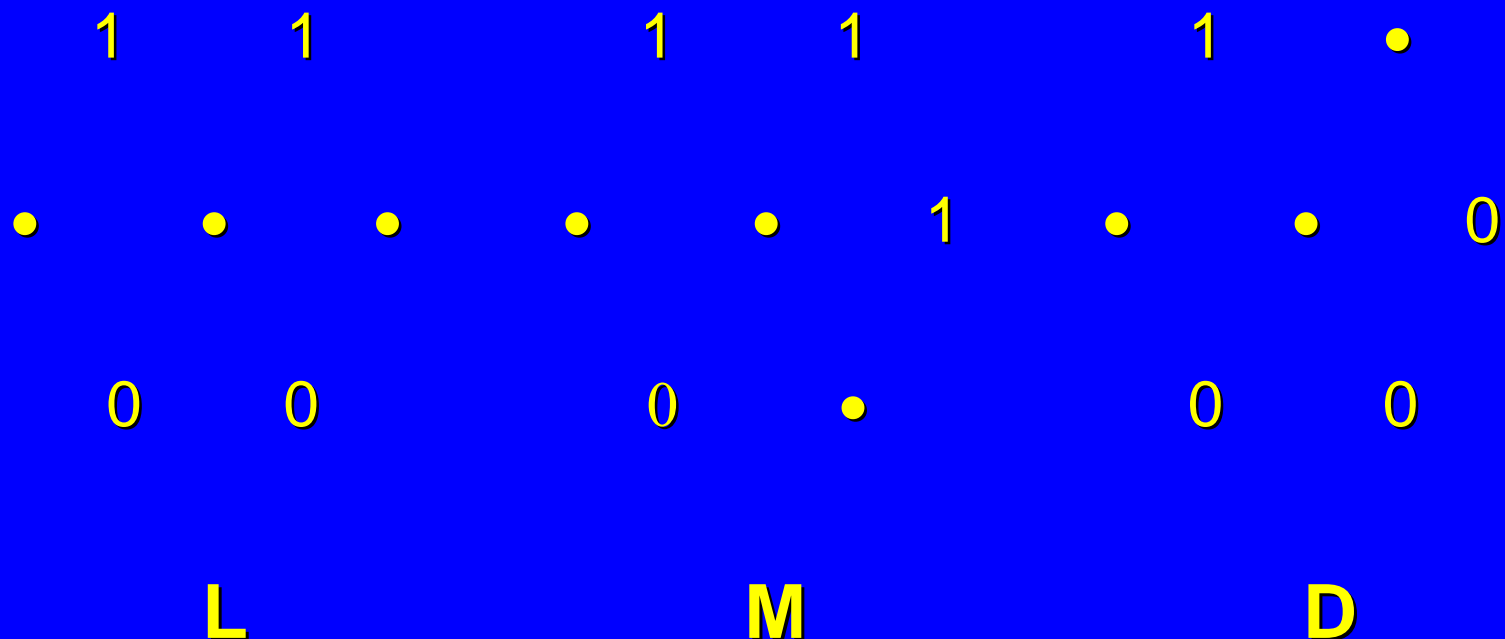
Le chemin rouge peut être remplacé par le chemin vert homotope après suppression du point central



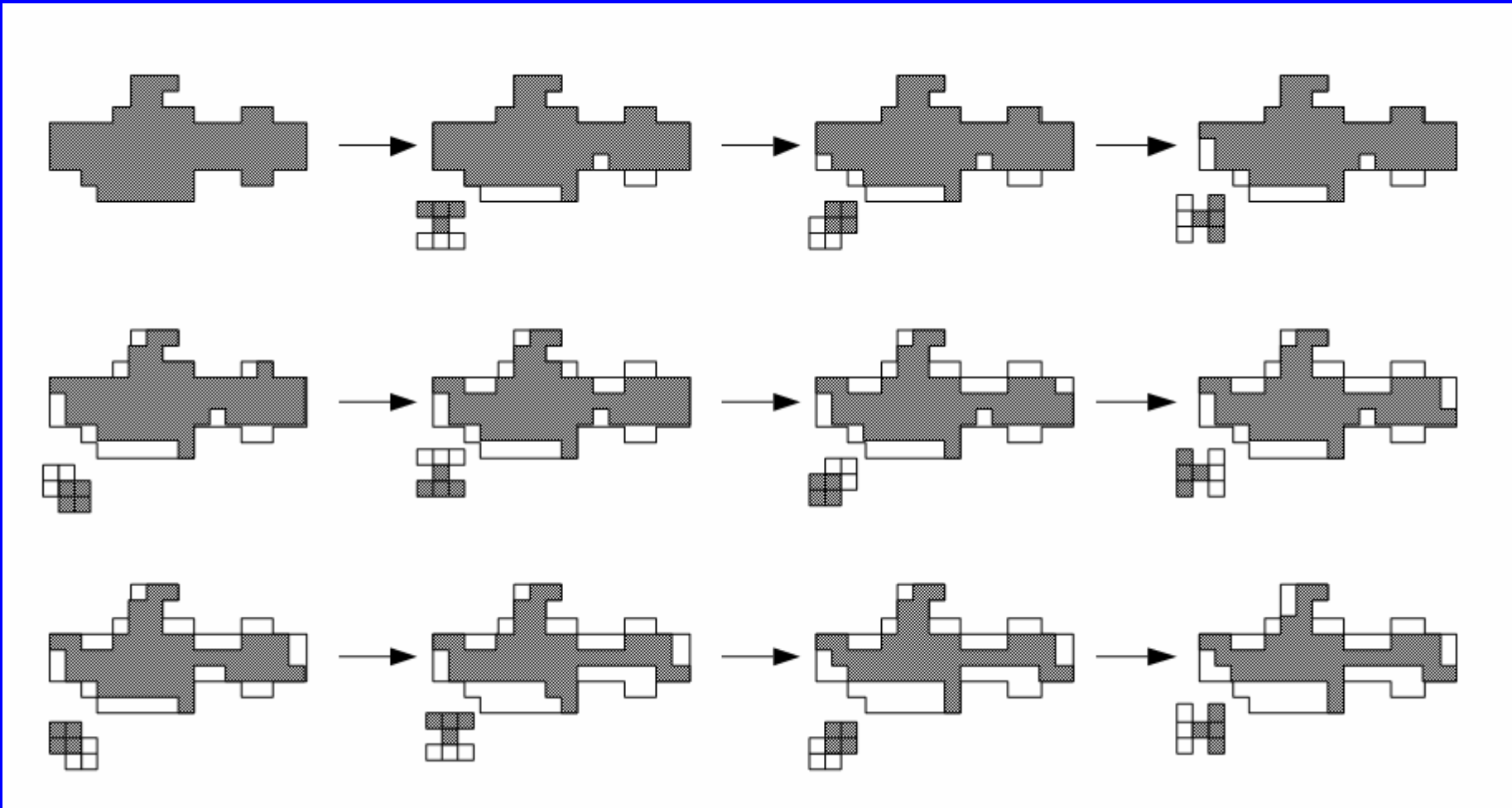
Seules les configurations où  $T'$  et  $T''$  sont simplement connexes produisent des amincissements homotopiques

# Éléments structurants L, M et D

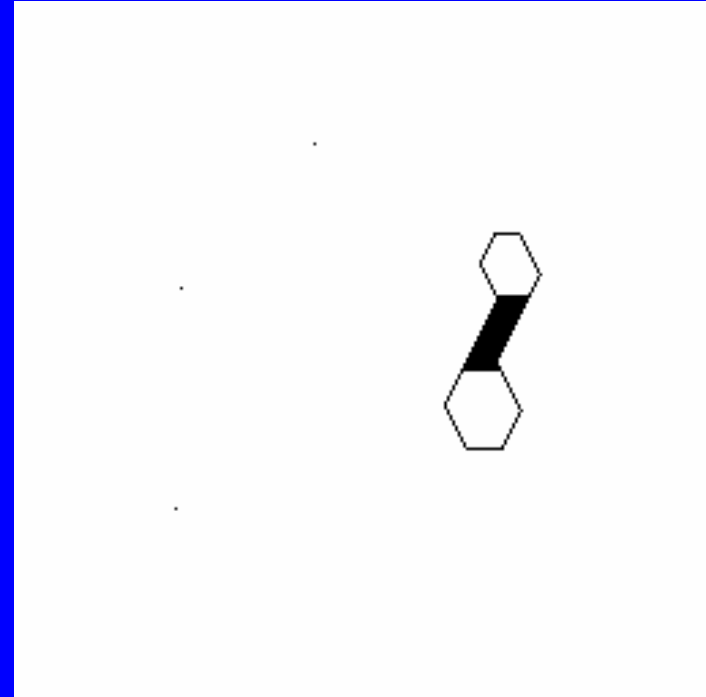
En trame hexagonale, en regroupant certaines configurations, on définit trois familles d'éléments structurants produisant des amincissements homotopiques à condition d'être utilisés séquentiellement



# Exemple d'amincissement séquentiel

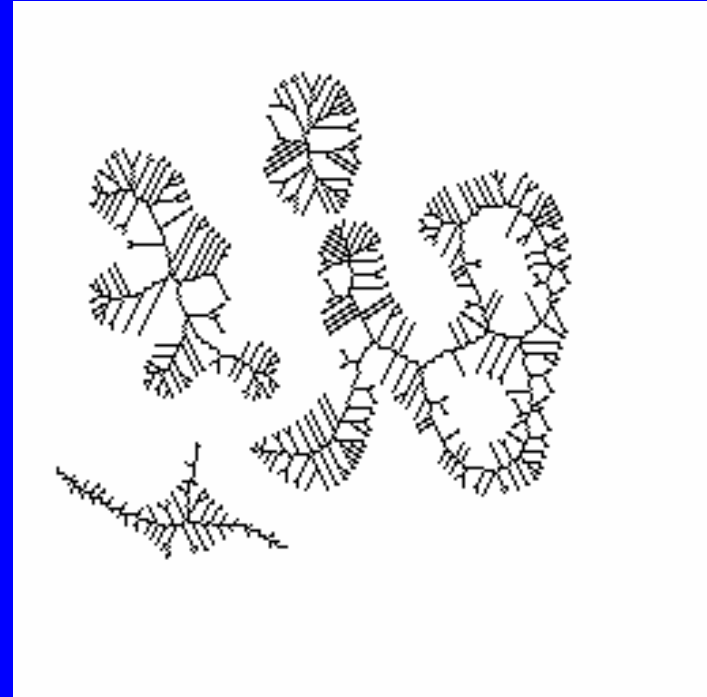


# Amincissements par D



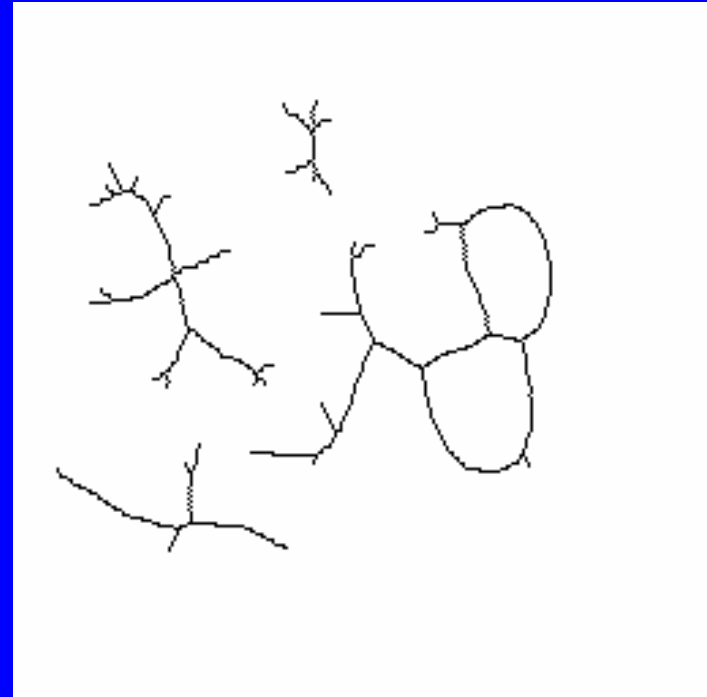
- D est utilisé pour mettre en évidence les composantes simplement connexes (elles sont homotopes à un point)
- On l'utilise également pour construire un centroïde de la composante connexe (ce n'est pas le centre géodésique)

# Amincissement par M



- L'amincissement est rarement utilisée (le résultat est beaucoup trop chaotique!)
- L'épaississement est utilisé dans un contexte géodésique

# Squelette L



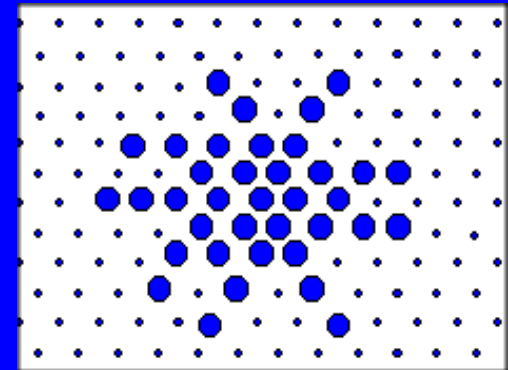
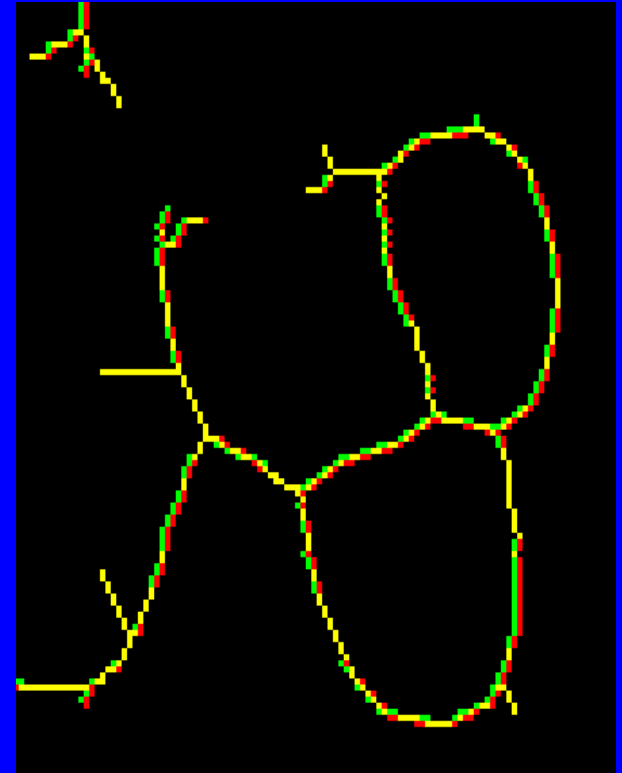
Cet amincissement est souvent appelé squelette car:

- Il est connexe
- Il est construit à l'aide d'un algorithme de propagation
- Le résultat « ressemble » à un squelette

Cependant, il présente de nombreux défauts

# Défauts du squelette L

- Il ne contient pas le squelette par boules maximales
- Le résultat final diffère selon la séquence d'éléments structurants
- Ce squelette peut être très épais
- Le résultat est souvent biaisé et les biais peuvent être très importants



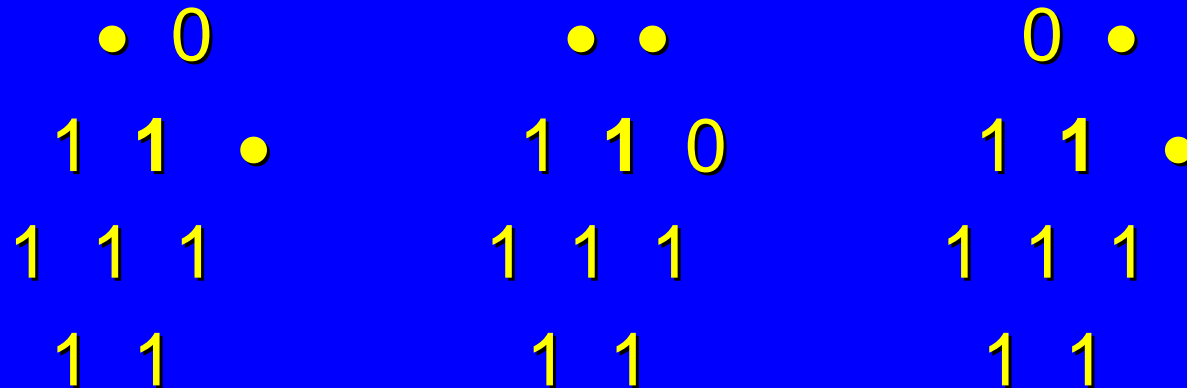
# Améliorations

Diverses améliorations ont été proposées. Elles ont pour but de faire en sorte que le squelette par boules maximales soit inclus dans le squelette par amincissements homotopiques

- Utilisation d'intersections d'amincissements homotopiques (permet de définir des amincissements isotropes, indépendants de l'ordre des rotations)
- Utilisation d'amincissements géodésiques

# Intersections d'amincissements homotopiques

On peut montrer que le squelette par boules maximales peut s'obtenir par une intersection d'amincissements par toutes les rotations des éléments structurants suivants:



Ces éléments structurants ne sont pas construits sur l'hexagone élémentaire!

# Intersections d'amincissements homotopiques (2)

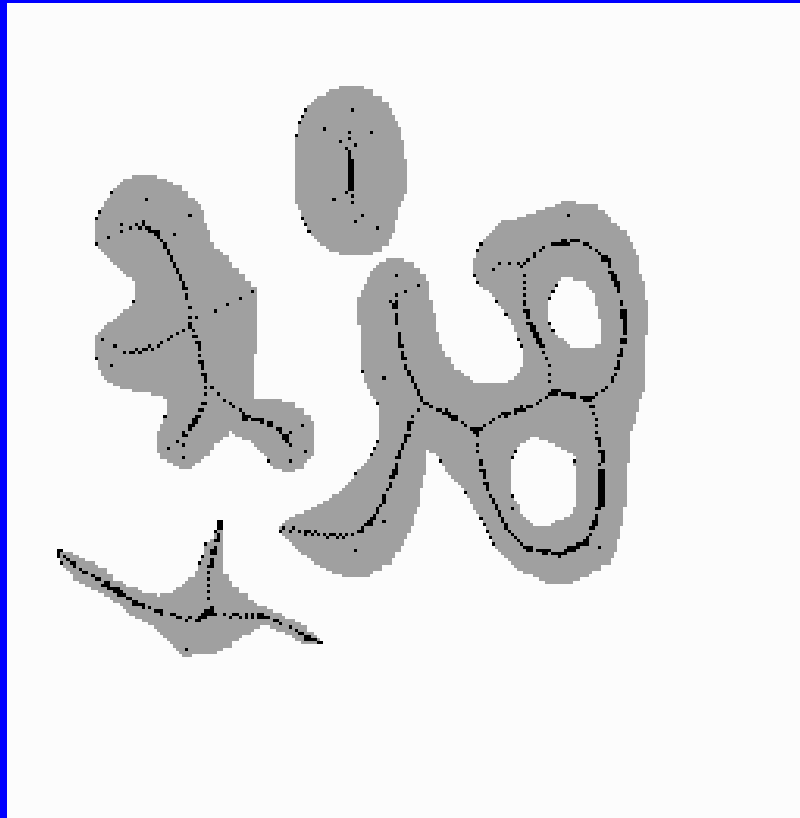
En triant parmi ces configurations celles qui préservent l'homotopie, on montre que seules les configurations du type:

$$\begin{array}{cccc} \bar{2} & 0 & & \\ 1 & 1 & \bar{2} & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

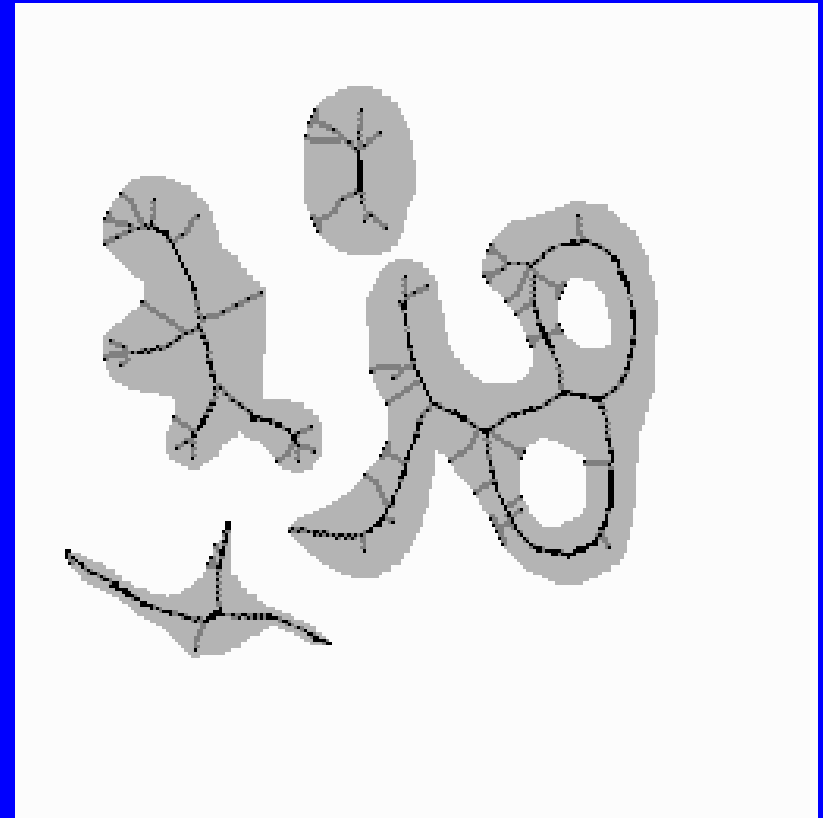
Et toutes leurs rotations produisent un squelette connexe contenant le squelette par boules maximales

- Les points à 1 doivent être inclus dans l'ensemble  $X$
- Le point à 0 doit être inclus dans le complémentaire  $X^c$
- Les points  $\bar{2}$  ne doivent pas être des points du résidu  $X \setminus \gamma(X)$

# Exemple de squelette connexe non biaisé



Squelette par boules maximales



Squelette connexe contenant le squelette par boules maximales

# Usage du squelette

Le squelette en tant que tel a peu d'intérêt:

- Le squelette par boules maximales n'est pas un bon descripteur de forme
- La représentation d'un ensemble par son squelette et sa fonction d'étanchéité ne conduit pas à la définition d'algorithmes plus performants pour effectuer les opérations morphologiques élémentaires
- Le squelette connexe présente de nombreux défauts

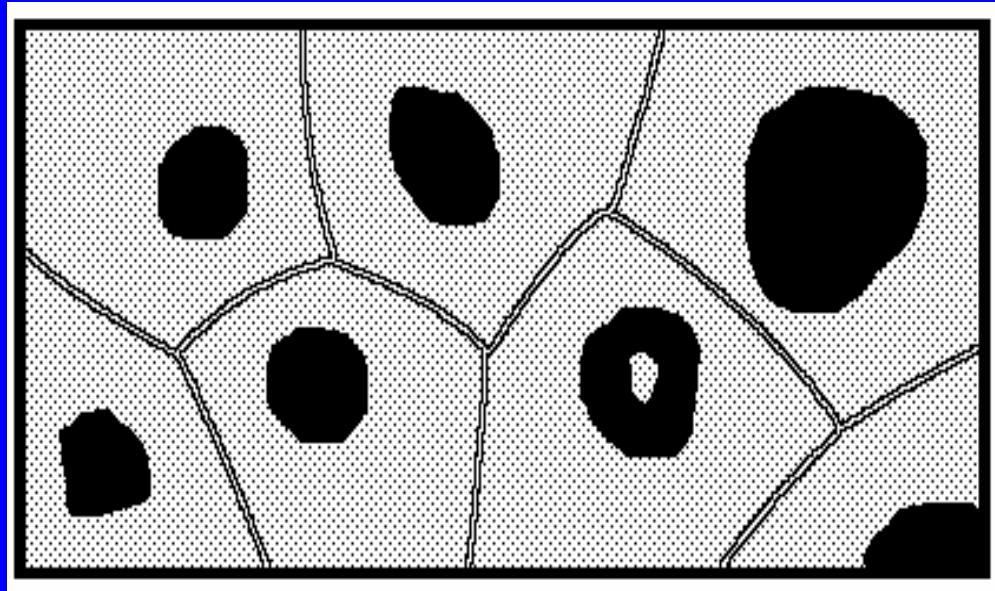
Le squelette par zone d'influence (SKIZ) est beaucoup plus utilisé.

# Le squelette par zones d'influence

$X$ , ensemble formé de  $n$  composantes connexes  $\{X_i\}$

- Zone d'influence  $Z(X_i)$  de  $X_i$ : ensemble des points plus proches de  $X_i$  que de toute autre composante connexe de  $X$ :

$$z(X_i) = \{x : \forall j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j)\}$$



# Construction du SKIZ

Le SKIZ est construit à l'aide d'épaississements homotopiques combinés à un opérateur éliminant les barbules

L'épaississement sur la trame hexagonale est réalisé avec M (indispensable dans le cas où une composante connexe est réduite à un point) et l'ébarbulage avec un élément structurant noté E:

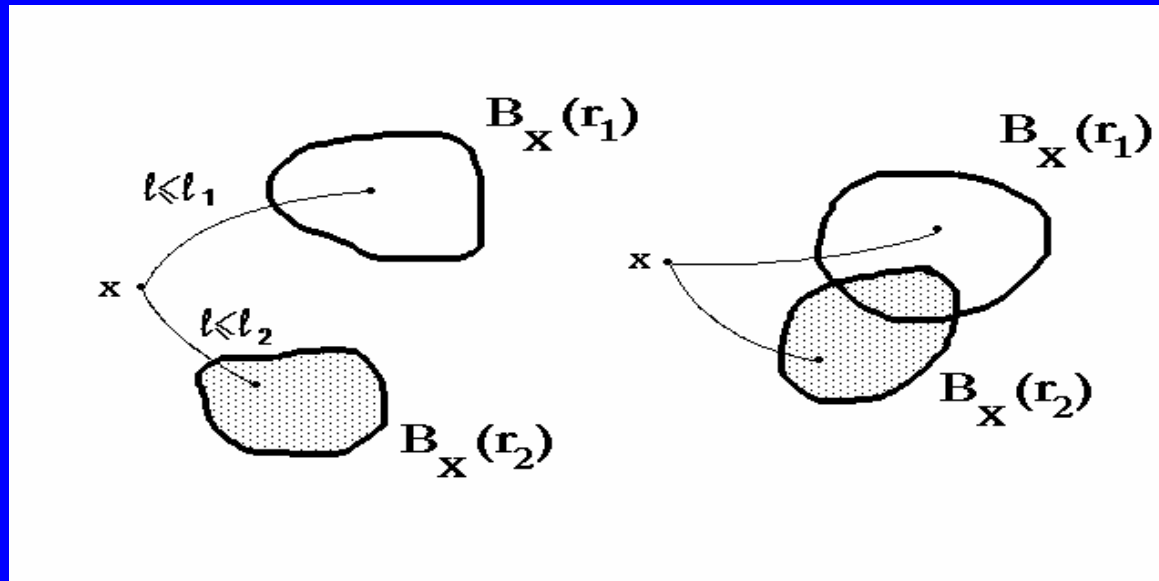
$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ M & \cdot & \cdot & 0 & E & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & \cdot & & & 1 & 1 \end{array}$$

Le SKIZ n'est pas une transformée homotopique (les trous des composantes connexes sont éliminés).

L'algorithme par épaississements engendre quelques biais

# Amincissements, épaisissements géodésiques

On peut définir des amincissements et épaisissements géodésiques. Les éléments structurants sont définis à l'aide de boules et de distances géodésiques. Ces éléments structurants ne sont pas « rigides » mais déformables.



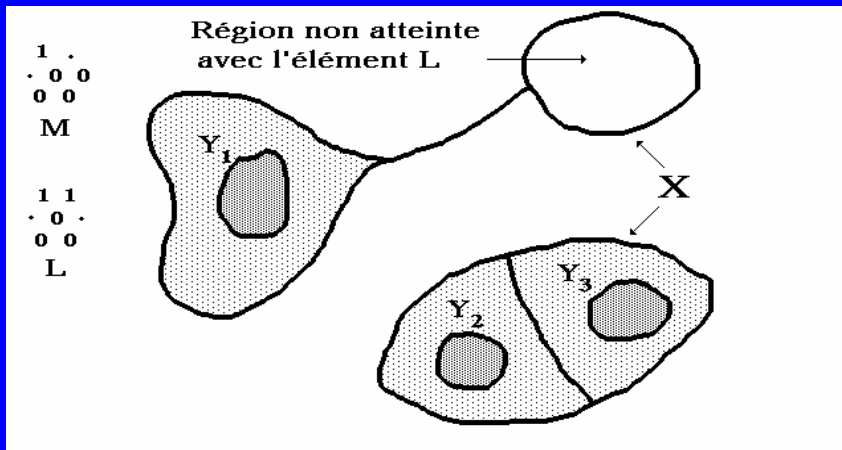
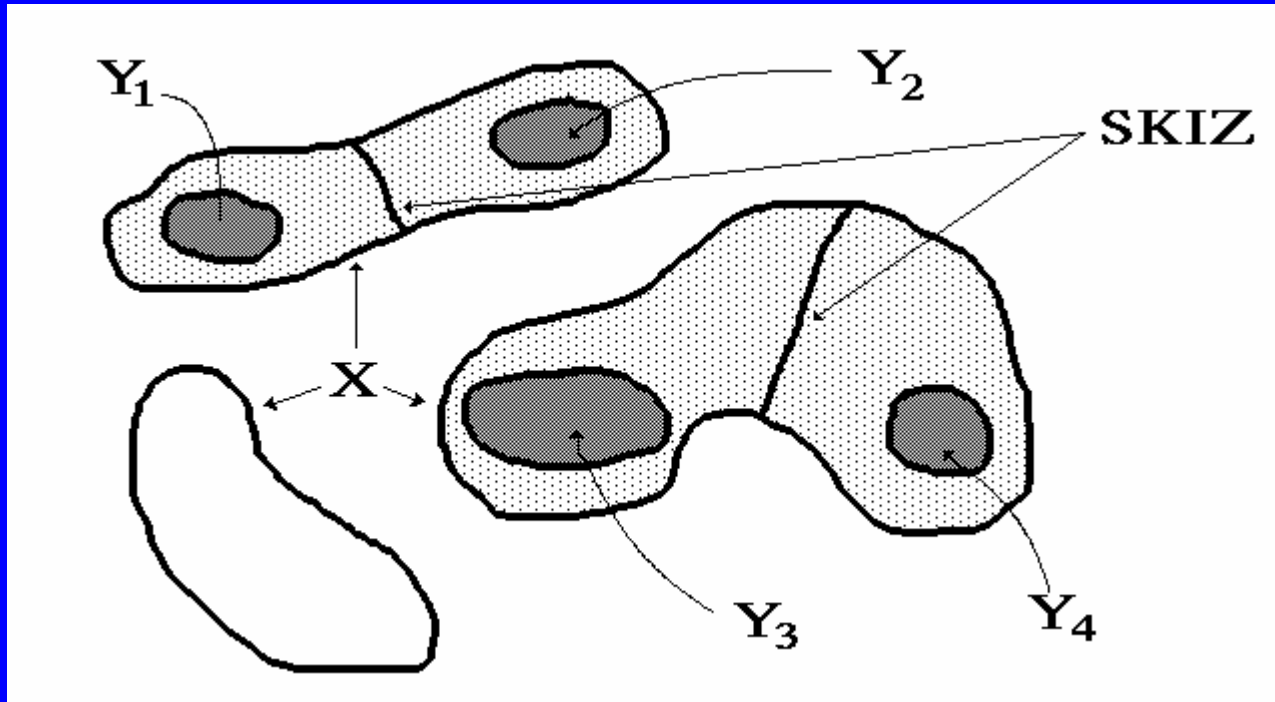
# SKIZ géodésique

Ensemble  $Y$  formé de composantes connexes et inclus dans un espace géodésique  $X$

Zone d'influence d'une composante connexe: ensemble des points de  $X$  à une distance géodésique finie de la composante connexe et plus proche de celle-ci que de tout autre composante connexe:

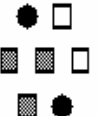
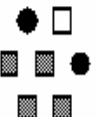
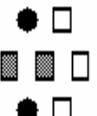
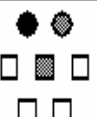
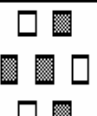
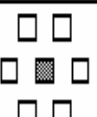
$$Z_X(Y_i) = \left\{ \begin{array}{l} x \in X : d_X(x, Y_i) < +\infty \\ \text{et} \\ \forall j \neq i, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y_j) \end{array} \right\}$$

# SKIZ géodésique, construction



L'utilisation de l'élément structurant  $M$  est indispensable pour assurer la propagation dans les régions de  $X$  de faible épaisseur

# Résumé, liste des éléments structurants principaux en hexagonal

Élément structurant	Amincissement séquentiel	Epaississement séquentiel	Transformation en tout ou rien
L		Squelette	Squelette du fond
M		Squelette avec ramifications	Epaississement à partir de points isolés
D		Marqueur homotopique	Enveloppe quasi-convexe
E		Ebarbulage du squelette	Points extrémaux
F			Points triples
I			Points isolés

↑ Homotopiques ↓

↑ Non homotopiques ↓

# Troisième partie

# Résidus numériques

On peut définir en numérique des résidus élémentaires par différence entre deux transformations  $\psi$  et  $\zeta$  (avec  $\zeta \leq \psi$ )

Les exemples les plus courants de résidus élémentaires numériques sont le gradient morphologique et la transformée chapeau haut-de-forme:

- Gradient morphologique  $\delta_i - \varepsilon_i$   
(demi-gradients  $I - \varepsilon_i$  et  $\delta_i - I$ )

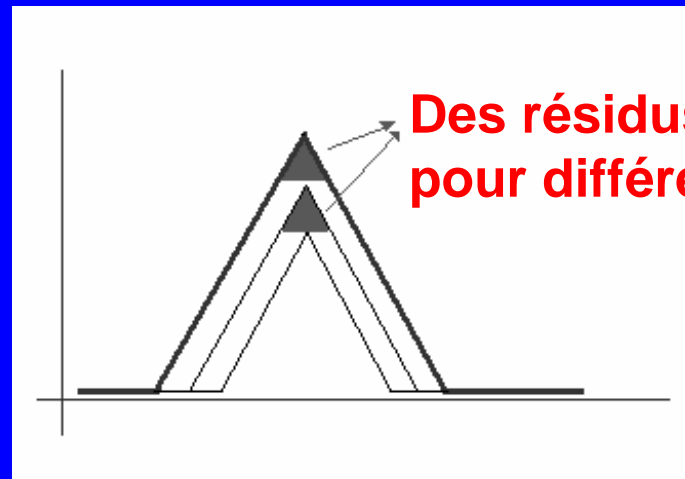
Transformée chapeau haut-de-forme  $I - \gamma_i$

# Résidus en morphologie numérique

On peut tenter d'étendre aux fonctions les définitions des résidus ensemblistes.

Cette extension fait apparaître certaines difficultés:

- La différence d'ensembles et la soustraction de fonctions ne sont pas vraiment équivalents.
- Plusieurs résidus différents peuvent apparaître en un point  $x \rightarrow$  problème de la définition de la fonction associée.



**Des résidus apparaissent pour différentes valeurs de  $i$ .**

# Transformées résiduelles numériques définition

Définition basée sur l'observation de l'évolution verticale de l'image au cours de sa transformation.

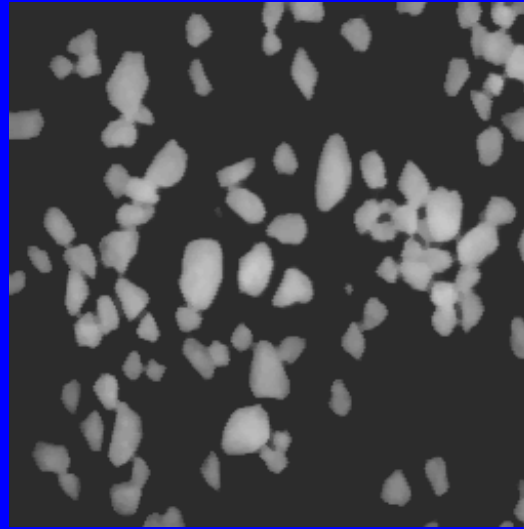
## Définitions

- Transformation  $\theta = \underset{i \in I}{\text{Sup}} (\psi_i - \zeta_i)$
- Fonction associée  $q = \arg \max(r_i) + 1 = \arg \max(\psi_i - \zeta_i) + 1$   
 $q(x) = \max(i) + 1 \quad r_i(x) > 0 \text{ et maximum}$

Dans le cas binaire, cette définition et la définition classique sont identiques.

# Exemples (1)

Erodé ultime



$\theta$

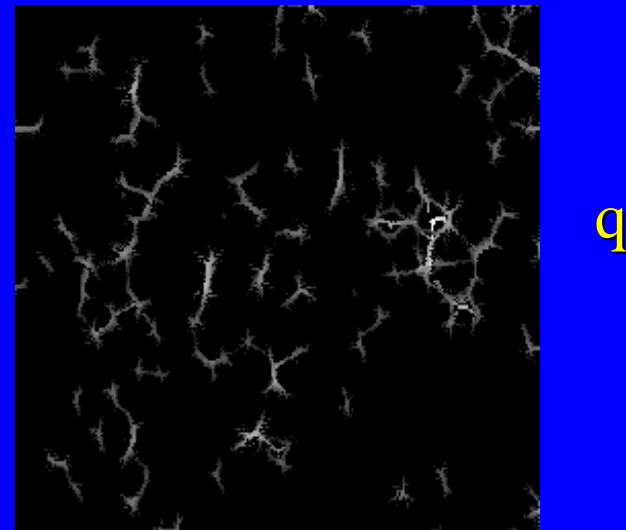
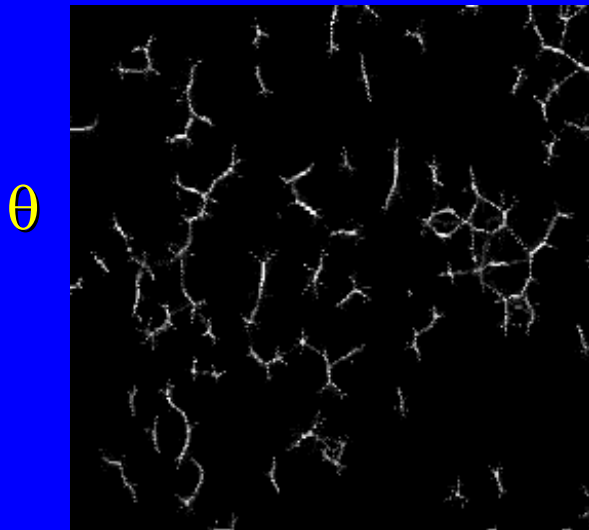


$q$



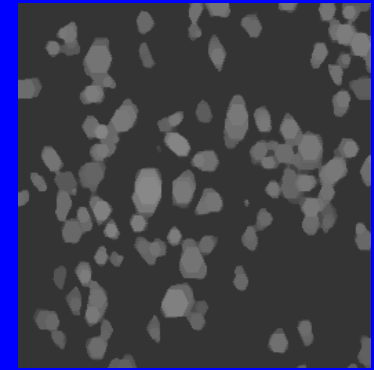
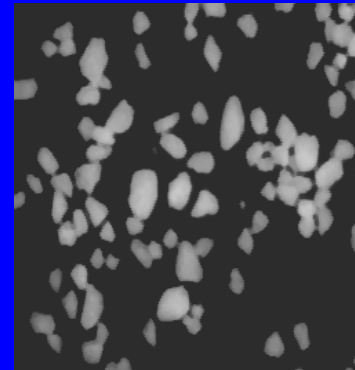
# Exemples (2)

## Squelette par « cylindres maximaux significatifs »



Problème de la reconstruction: Il n'est généralement pas possible de reconstruire entièrement la fonction à l'aide de son squelette

$$\rho(f) = \sup_{x \in E} (\theta(x) \oplus B_{q(x)})$$



# Nouveaux résidus

- L'extension de la définition des résidus ensemblistes comme l'érodé ultime ou les squelettes par ouvertures aux fonctions est intéressante.
- Cette définition des résidus permet surtout d'introduire, en numérique et en binaire, de nouvelles transformations résiduelles intéressantes tant du point de vue de la transformation elle-même que de la fonction associée.

On introduira en particulier:

- L'ouvert ultime (avec diverses variantes)
- La quasi-distance
- des résidus basés sur des empilements

# Ouvert ultime

$$\psi_i = \gamma_i$$

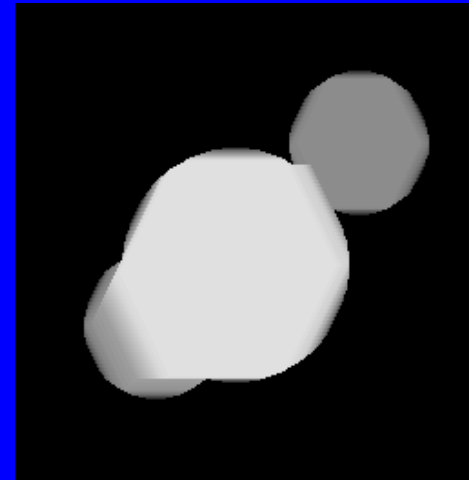
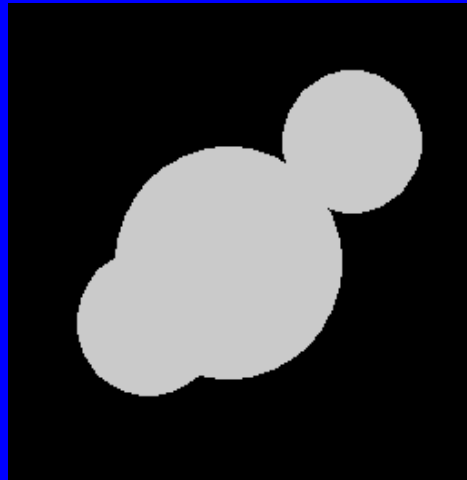
$$\zeta_i = \gamma_{i+1}$$

En binaire, la transformée  $\theta$  ne présente aucun intérêt ( $\theta = I$ ).

La fonction associée  $q$  est appelée fonction granulométrique.

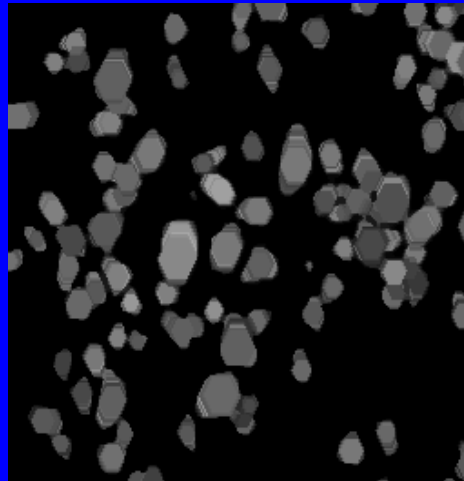
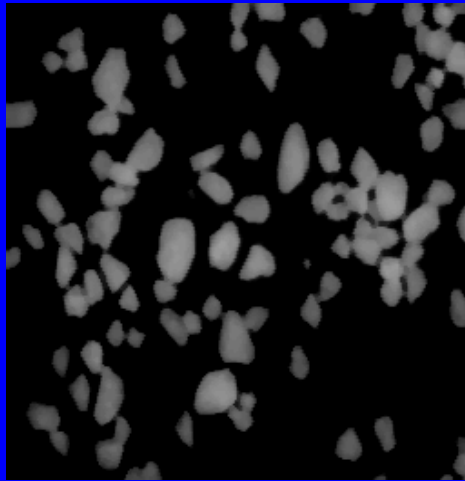
En chaque point  $x$ ,  $q(x)$  est égal (à l'unité près) à la taille de la plus grande boule recouvrant ce point  $x$  dans le cas binaire, au rayon du plus grand cylindre significatif de la reconstruction partielle recouvrant  $x$  dans le cas numérique.

## Ouvert ultime (2)

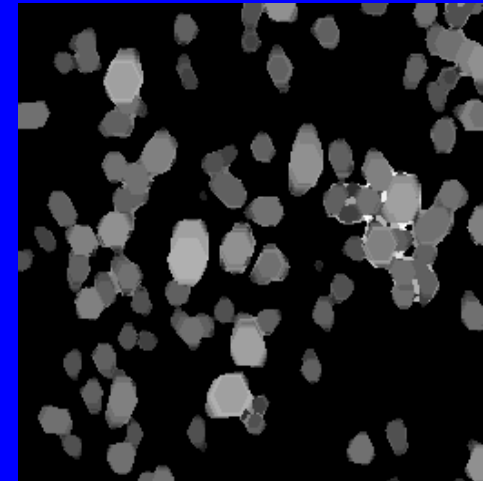


q

Fonction associée à l'ouvert ultime d'un ensemble



$\theta$



q

Ouvert ultime numérique et fonction associée

# Ouvert ultime, reconstruction

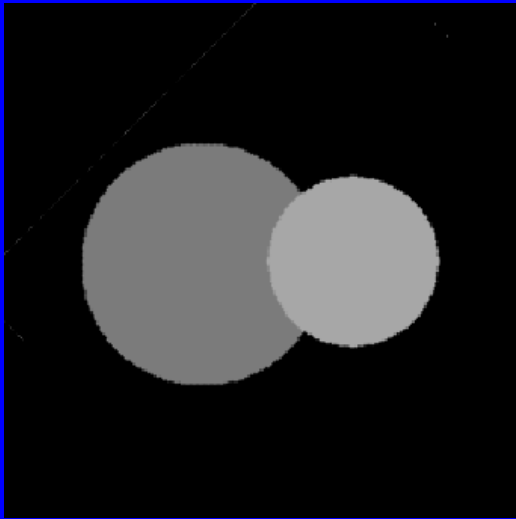
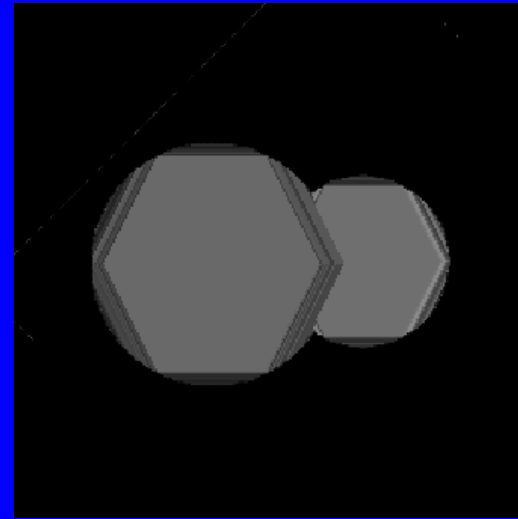
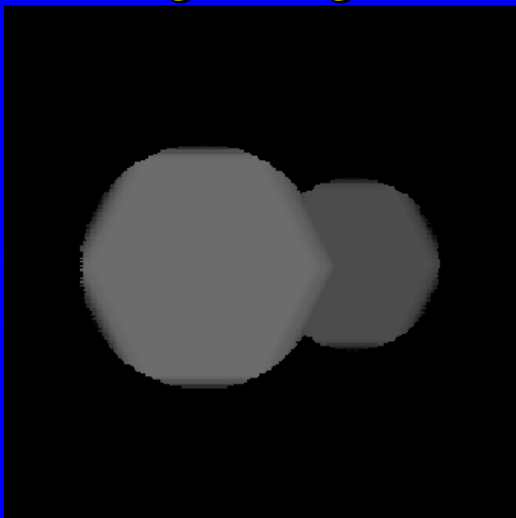


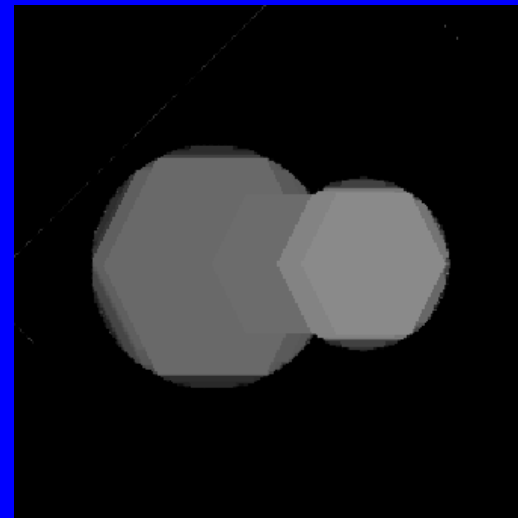
Image originale



Ouvert ultime



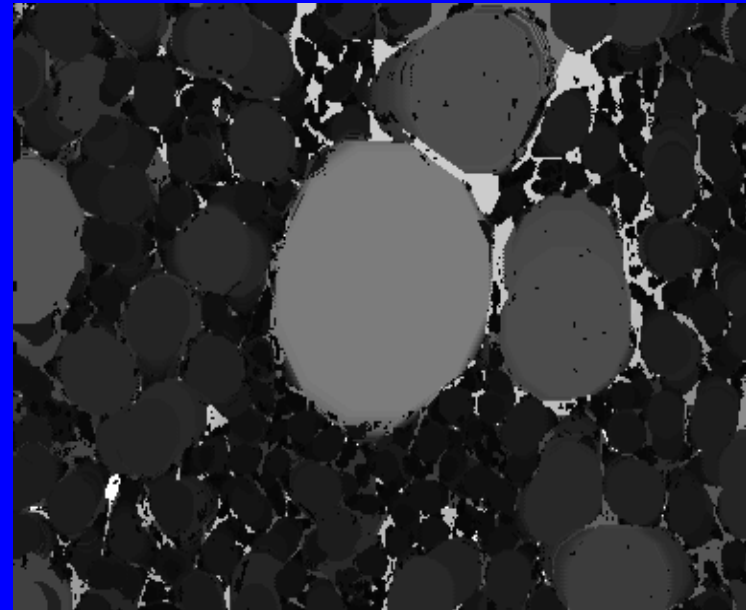
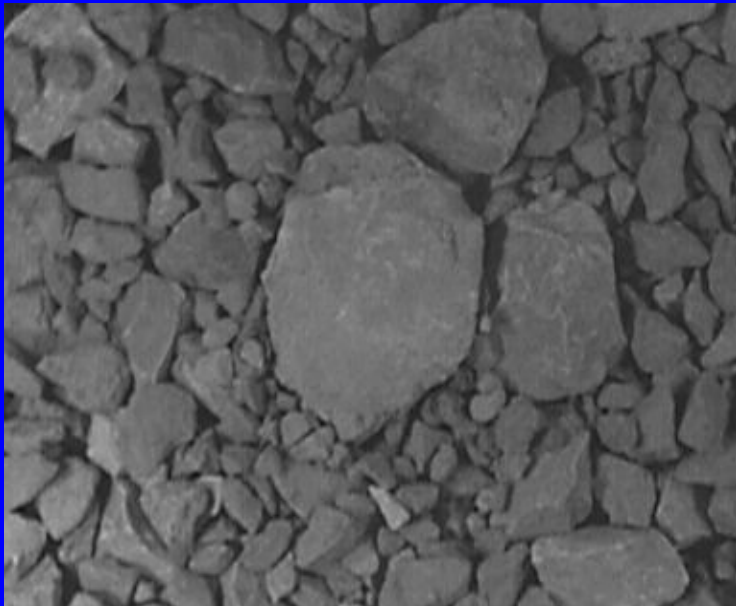
Fonction granulométrique



Reconstruction par squelette

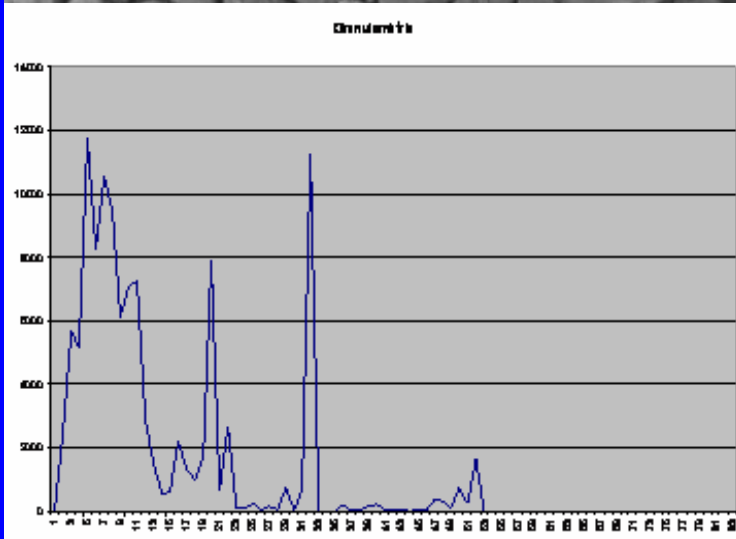
# Granulométries et segmentation

## Blocs en tas: Détermination de la granulométrie des blocs



### Fonction granulométrique

Ces fonctions permettent de définir la granulométrie des régions plus ou moins homogènes de l'image AVANT de les segmenter

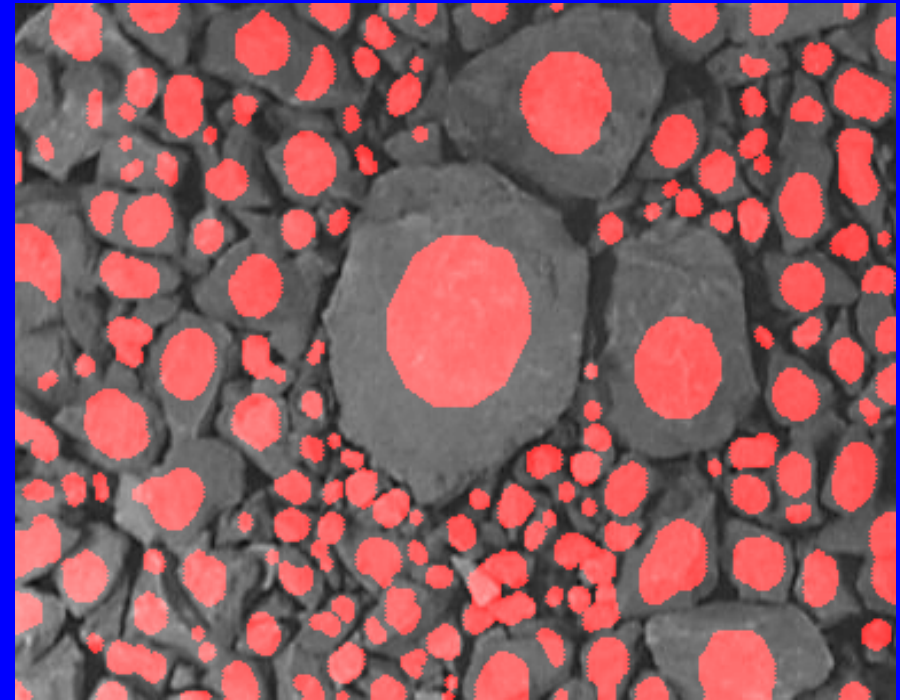
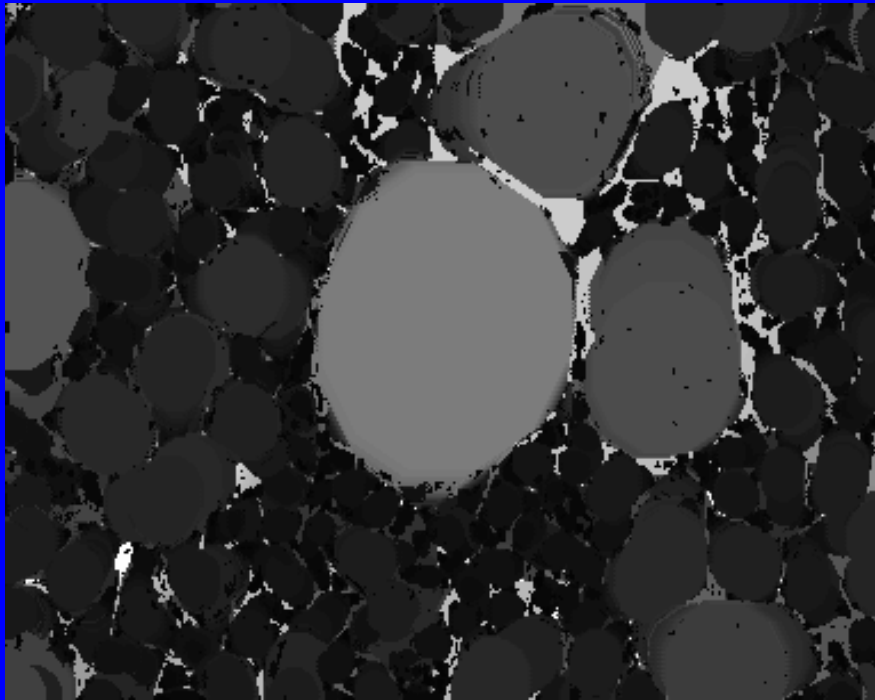


# Granulométries et segmentation (2)

Définition de marqueurs pour le comptage et la segmentation.

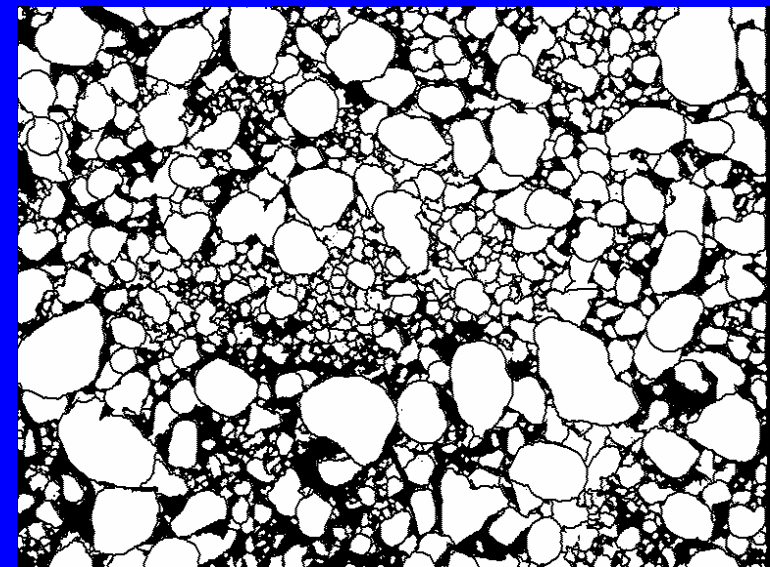
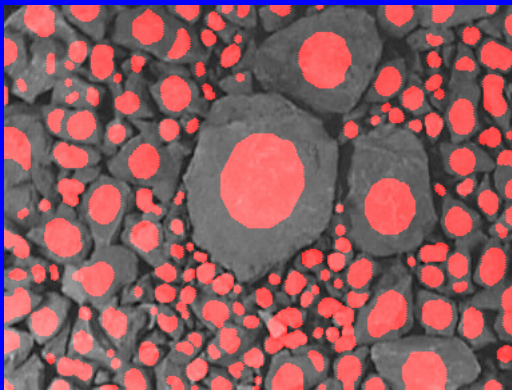
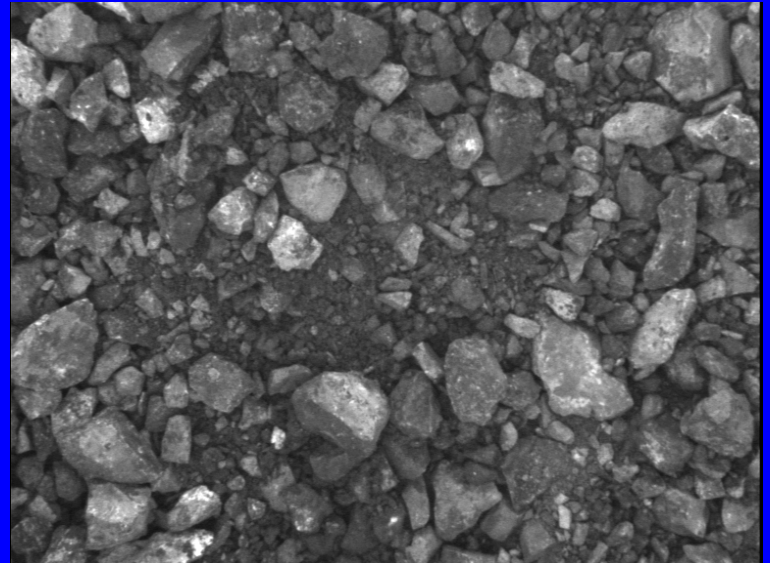
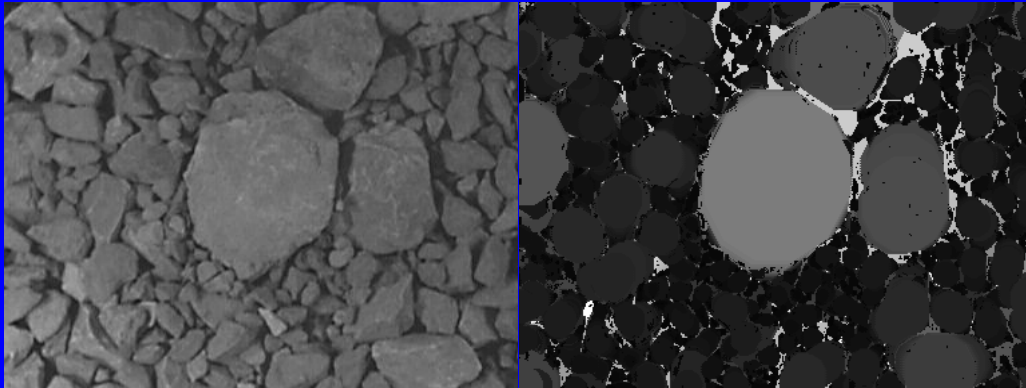
Pour chaque seuil  $i$  de la fonction granulométrique:

- bouchage des trous
- érosion de taille  $j = \max(k \cdot i, c)$ ,  $k < 1$



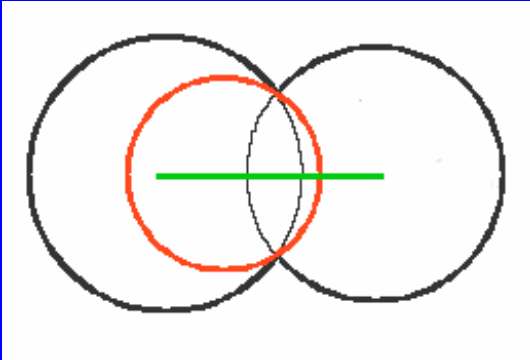
Marqueurs des blocs générés à partir de la fonction granulométrique

# Granulométries et segmentation (3)



Marqueurs des blocs  
générés à partir de la  
fonction granulométrique

# Boules maximales et boules critiques



La donnée des boules maximales (position et rayon) d'un ensemble  $X$  permet de reconstruire  $X$ .

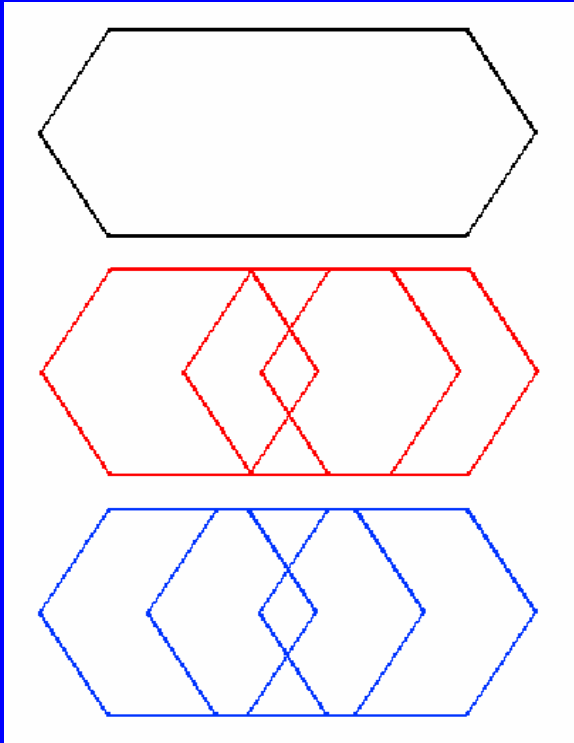
L'ensemble des boules maximales est redondant pour la reconstruction. La donnée des boules critiques suffit.

## Définition d'une boule critique

Une boule maximale  $B$  est critique lorsqu'il n'existe aucune combinaison des autres boules maximales qui recouvre  $B$

La description de la forme d'un ensemble semble plus facile à l'aide de ses boules critiques

# Boules critiques digitales



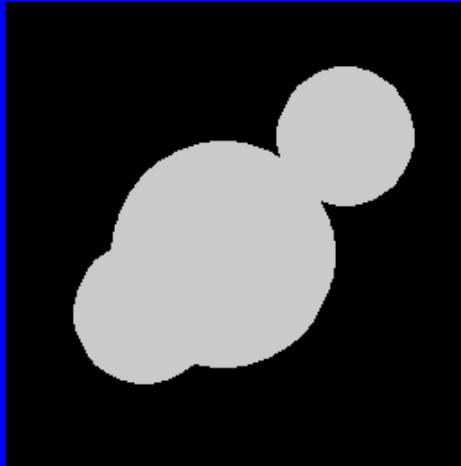
Une boule maximale digitale  $B_i$  de taille  $i$  est critique s'il n'existe aucune combinaison de boules maximales  $B_j$  de taille différente de  $i$  qui recouvre  $B_i$ .

La fonction granulométrique permet de trier les boules critiques

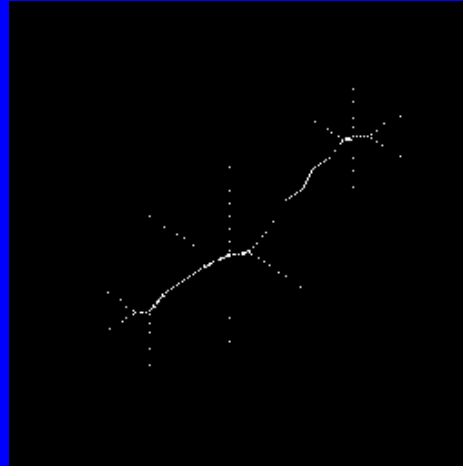
Deux étapes:

- élimination des centres des boules recouvertes par des boules plus grandes
- élimination des centres des boules restantes recouvertes par des boules plus petites

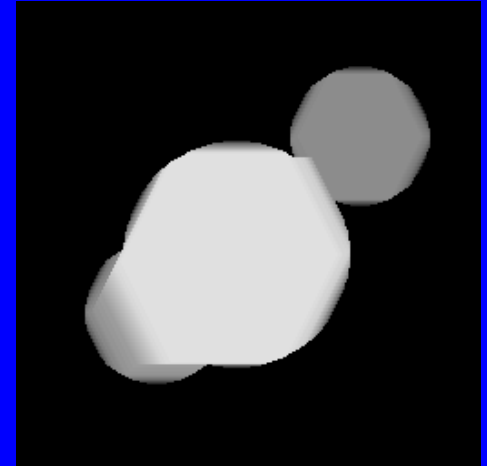
# Boules critiques digitales (2)



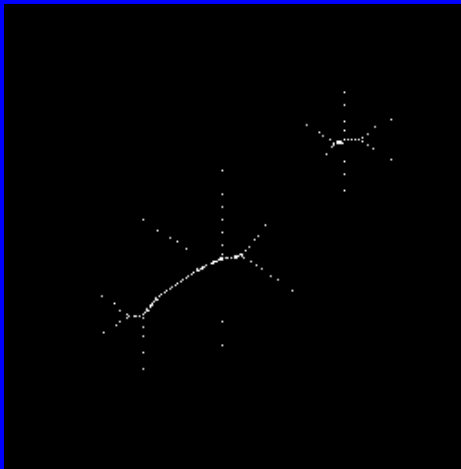
Ensemble initial



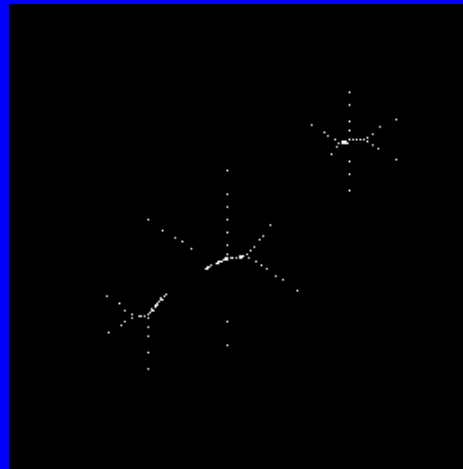
Extinction du squelette



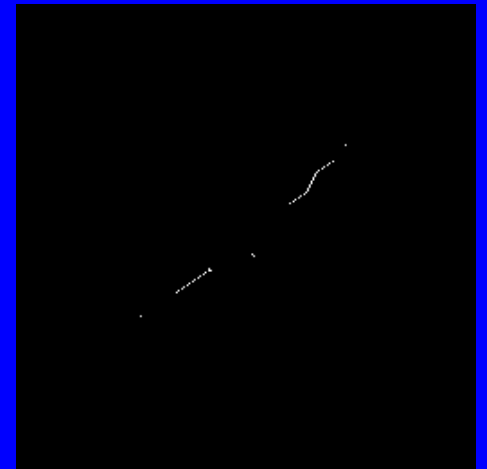
Fonct. granulométrique



Filtrage, 1ère étape



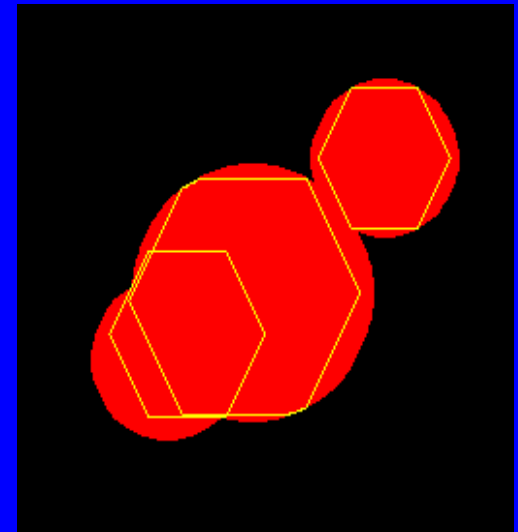
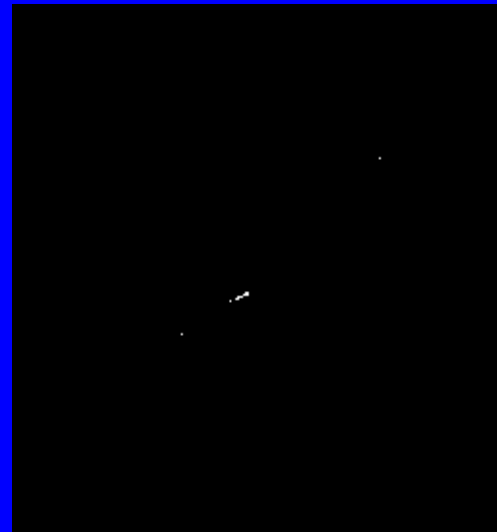
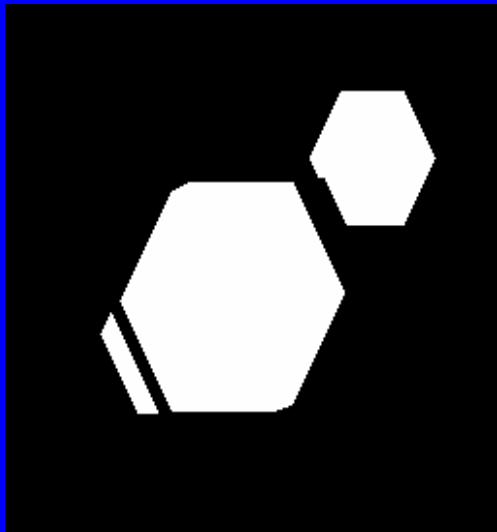
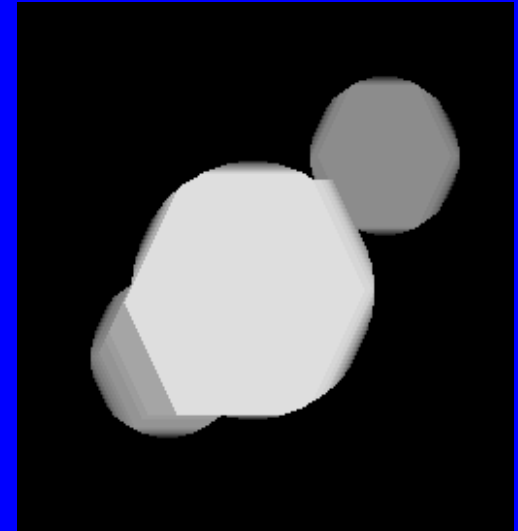
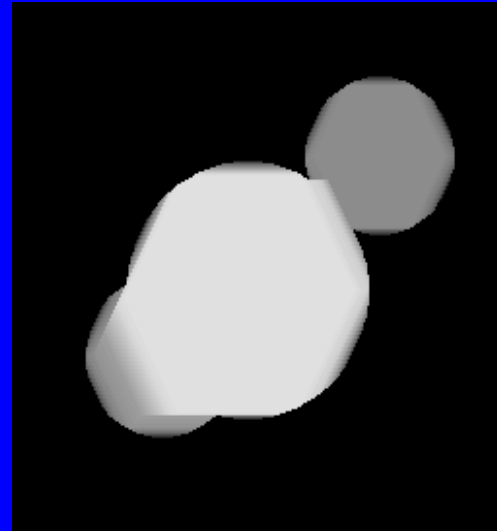
Centres des boules critiques



Centres non critiques

# Boules critiques digitales (3)

On peut reconstruire la fonction granulométrique à l'aide des boules critiques uniquement et en extraire les plus importantes.



# Autres ouverts ultimes

On peut définir de nouveaux ouverts ultimes en utilisant des ouvertures basées sur des critères

- Ouvertures surfaciques
- Ouvertures basées sur des diamètres de Féret et des tailles de boîtes englobantes

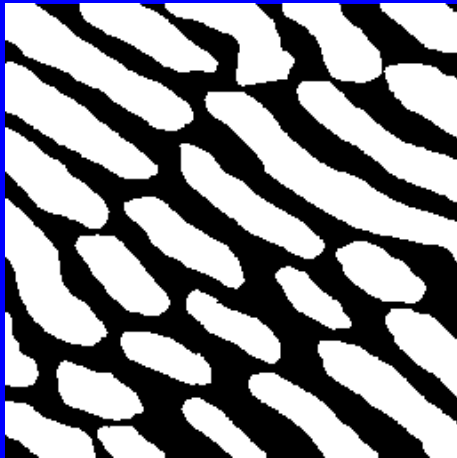
# Ouvertures surfaciques

## Ouvertures surfaciques ensemblistes

$$\gamma_{\lambda}^a(X) = \{x \in X / Aire(C_x(X)) \geq \lambda\}$$

Si  $X_i$  est une composante connexe de  $X$ ,  $\gamma_{\lambda}^a(X)$  est égal à l'union des  $X_i$  dont l'aire est supérieure ou égale à  $\lambda$

$$\gamma_{\lambda}^a(X) = \bigcup \{X_i / Aire(X_i) \geq \lambda\}$$



original



1250 pixels



2000 pixels

# Ouvertures surfaciques

## Ouvertures surfaciques numériques

$$(\gamma_{\lambda}^a(f))(x) = \sup \left\{ h \leq f(x) / x \in \gamma_{\lambda}^a(T_h(f)) \right\}$$

$T_h(f)$  est le seuil de  $f$  à la valeur  $h$ :  $T_h(f) = \{x : f(x) \geq h\}$



original



Taille 100 pixels

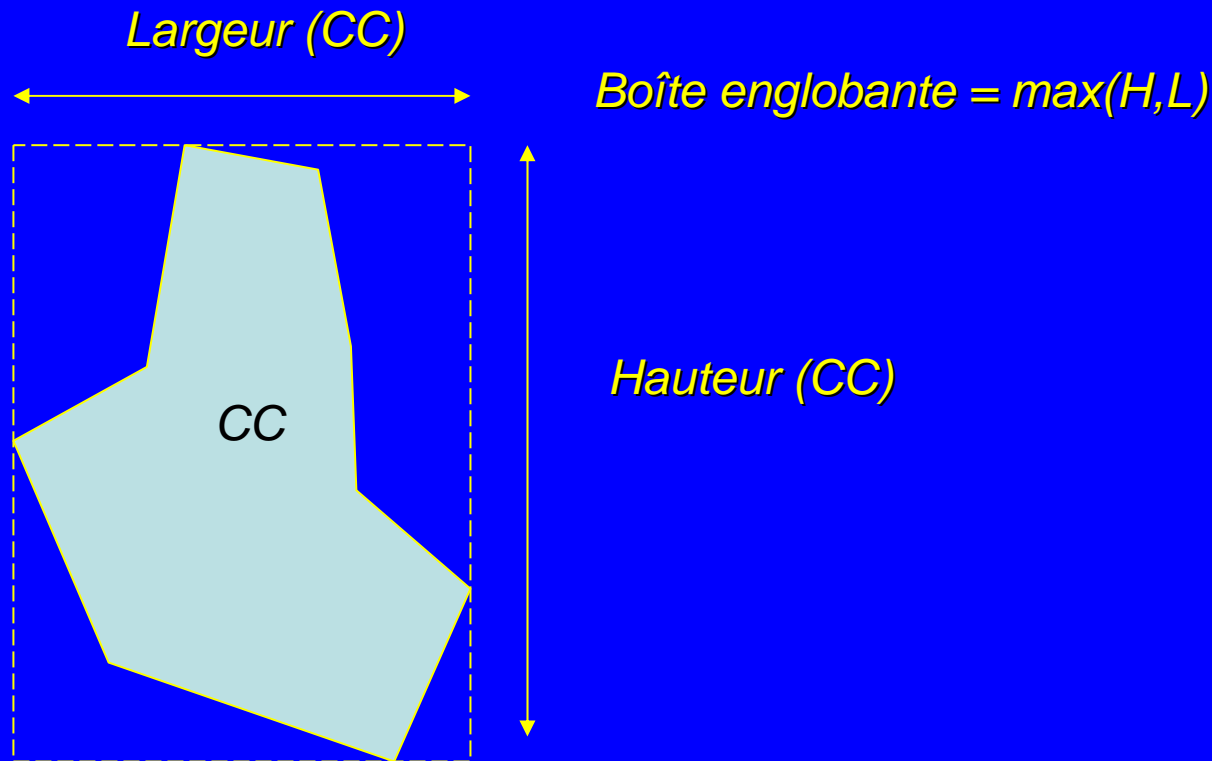


Taille 500 pixels

L'ouverture surfacique s'obtient en empilant les ouvertures surfaciques de tous les seuils de la fonction

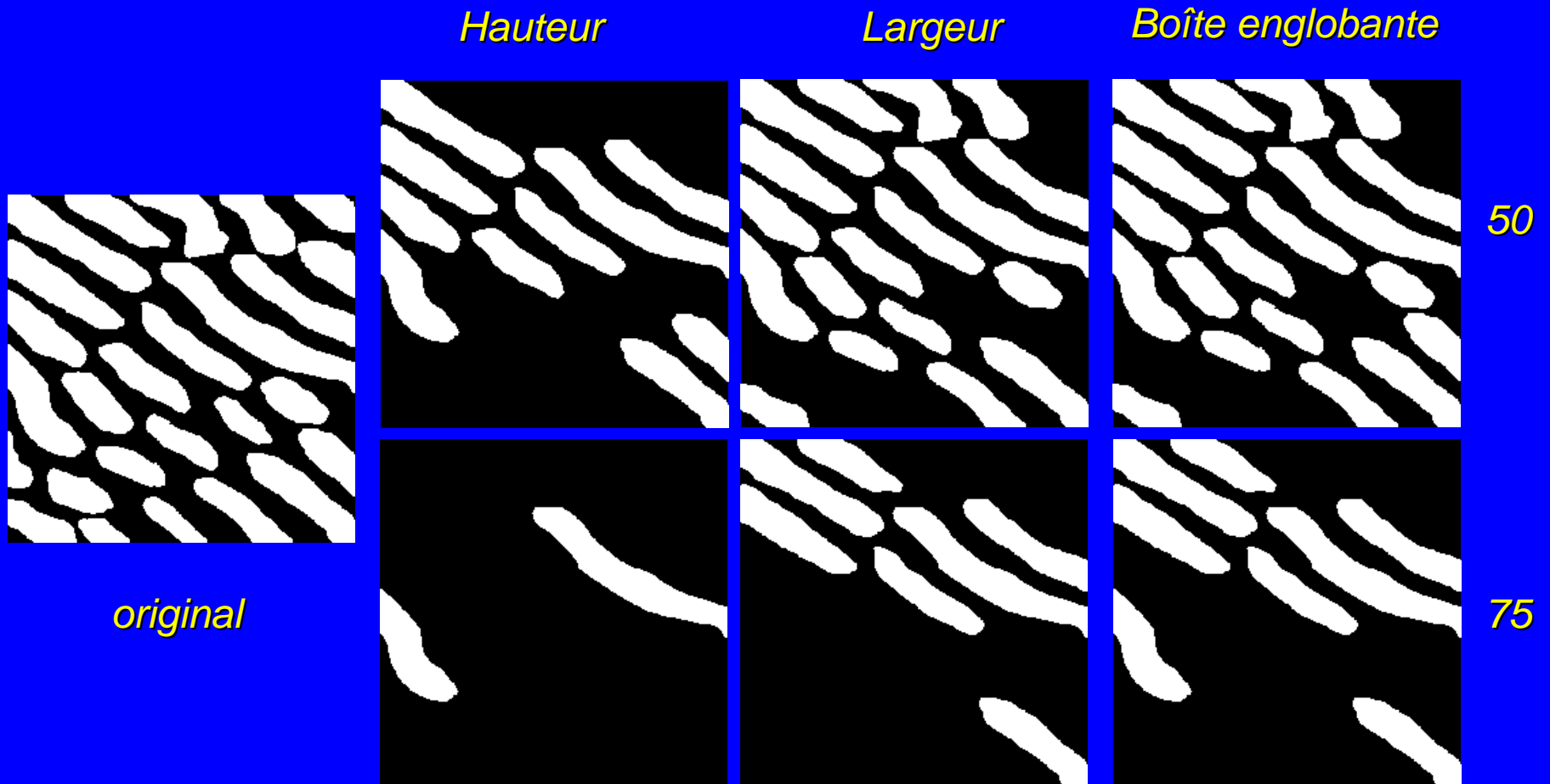
# Ouvertures par boîtes englobantes

Plutôt que la surface, on peut utiliser les diamètres de Féret horizontaux et verticaux des composantes connexes de  $X$  ou la taille de la boîte englobante



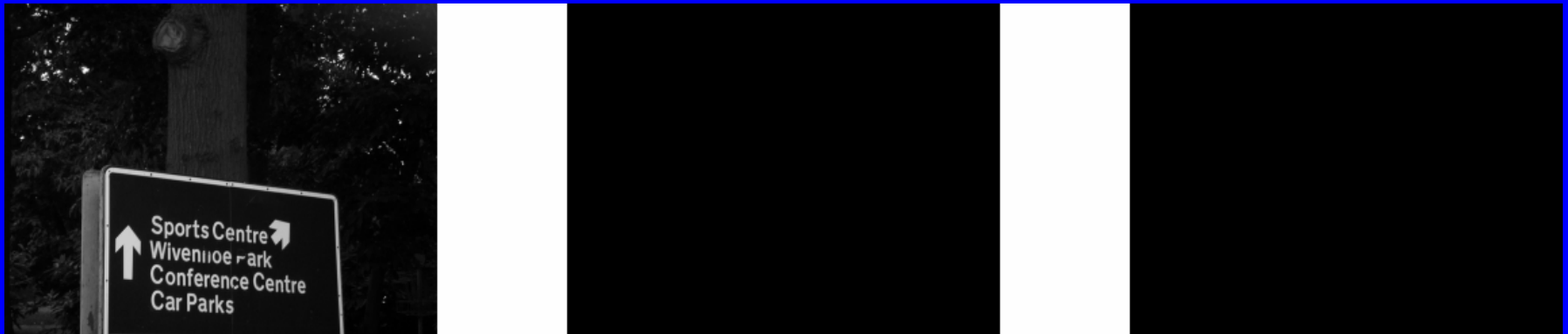
# Exemple d'ouverture par boîte englobante

L'ouverture par boîte englobante est une union d'ouvertures



# Ouvertures ultimes par critères

Détection de texte enfoui dans les images



*Ouverture par Critère  
Diamètre de Ferret*

*Résidu maximal*

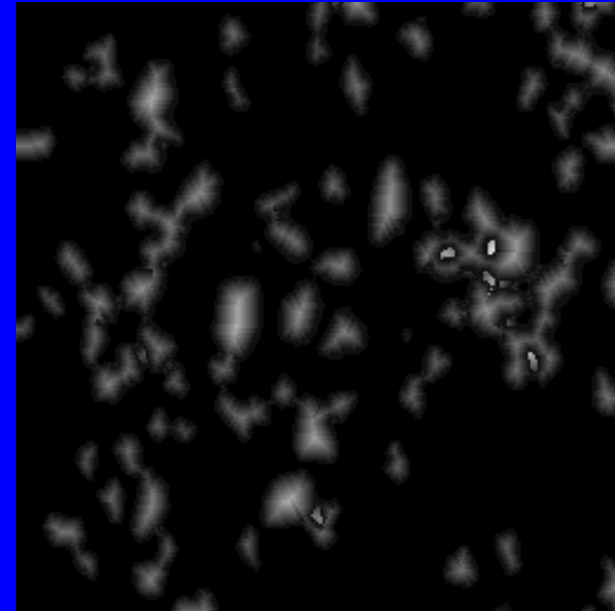
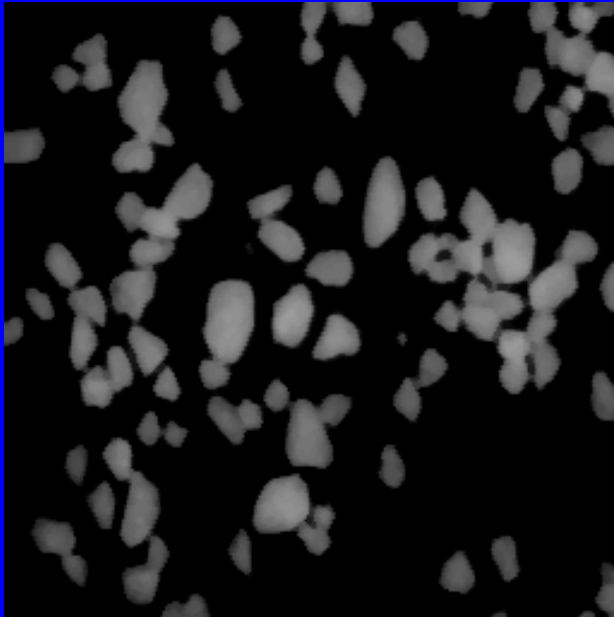
*Taille de l'ouvert  
correspondant au  
résidu maximal*

# Quasi-distance

$$\psi_i = \varepsilon_i$$

$$\zeta_i = \varepsilon_{i+1}$$

- En binaire,  $\theta$  et  $q$  ne sont pas intéressants ( $\theta = 1$  et  $q$  est la fonction distance).
- En numérique  $q$  est appelée quasi-distance.

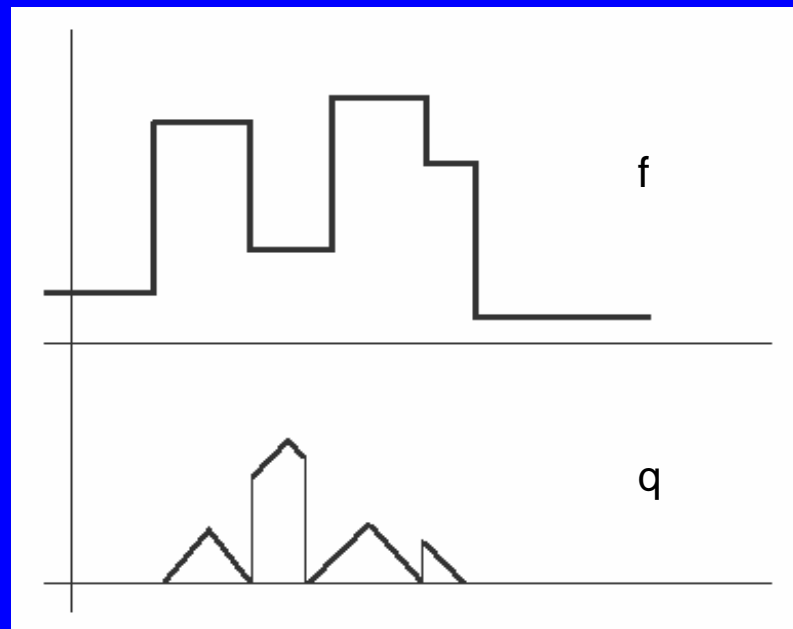


Des distances « perchées » apparaissent.

# Quasi-distance (2)

La quasi-distance n'est pas 1-Lipschitzienne.

On peut rendre la quasi-distance 1-Lipschitzienne par un opérateur itératif de « descente » des distances perchées.



- En tout point  $x$  où  $[q - \varepsilon(q)](x) > 1$ , faire  $q(x) = \varepsilon(q)(x) + 1$
- Répéter jusqu'à idempotence.

# Quasi-distance (3)

## Quasi-distances brute et corrigée

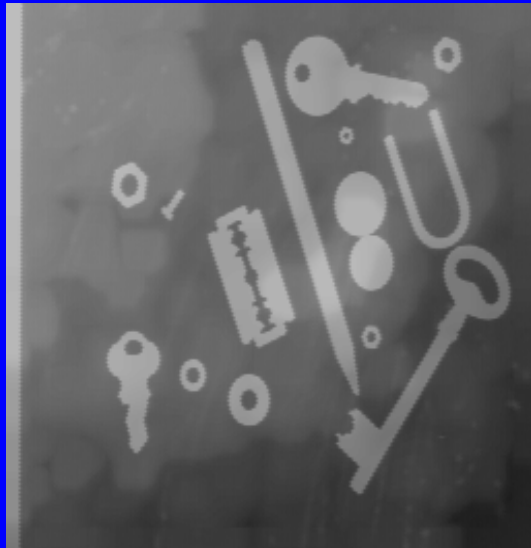
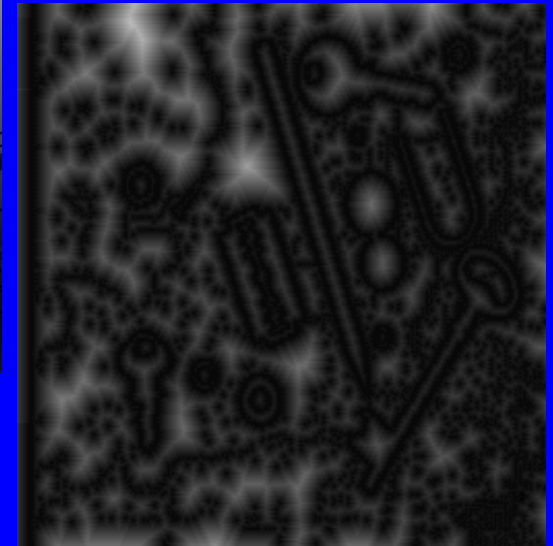


Image initiale

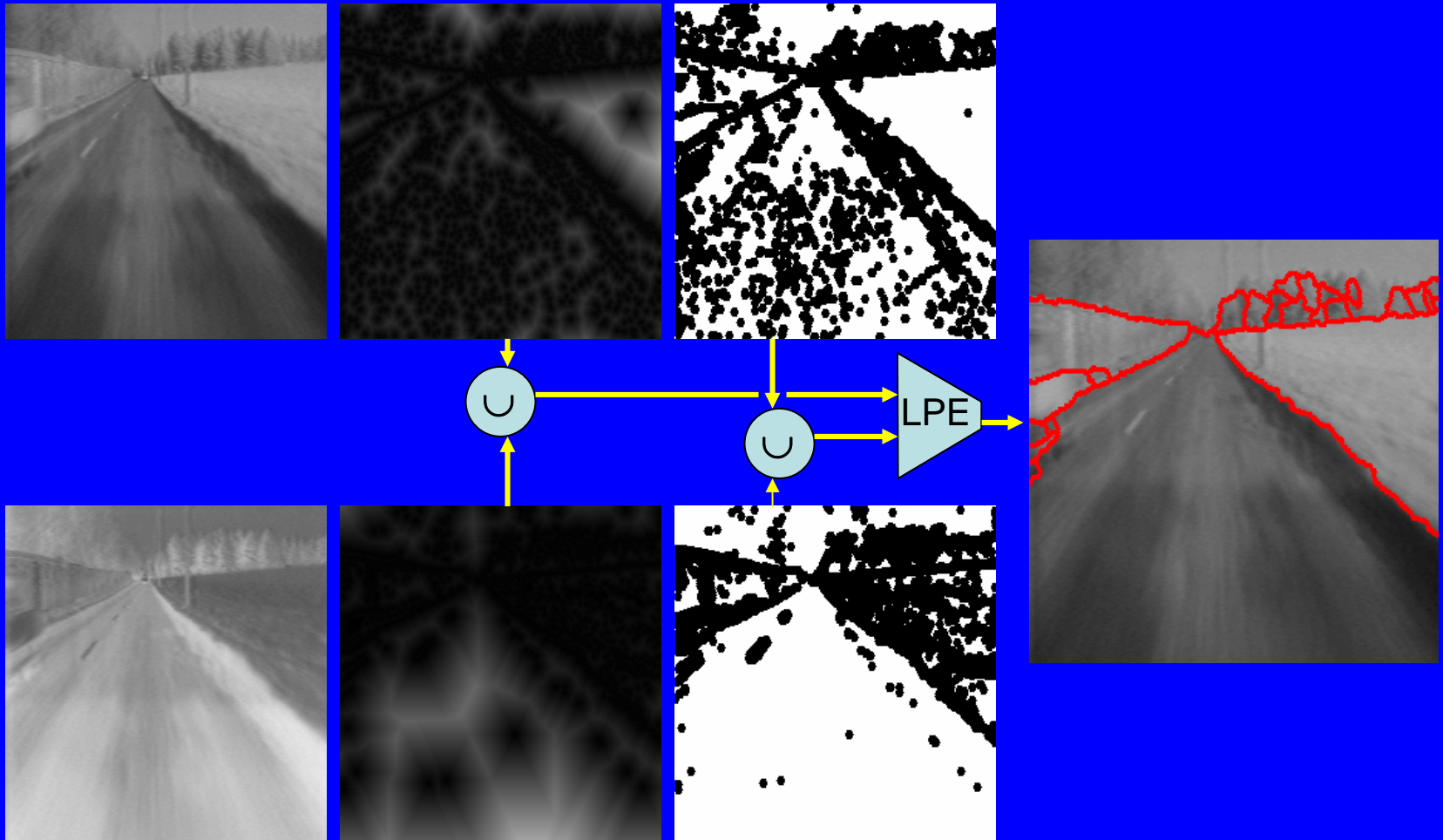


Quasi-distance brute



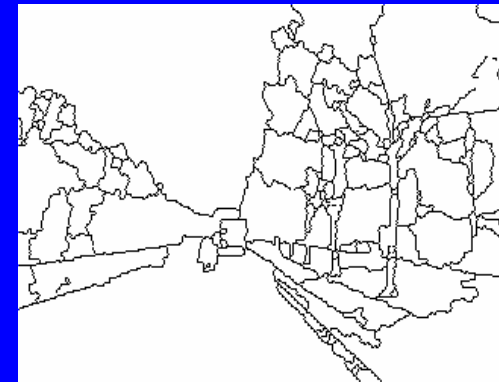
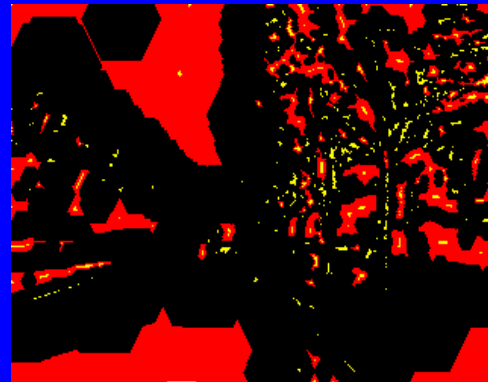
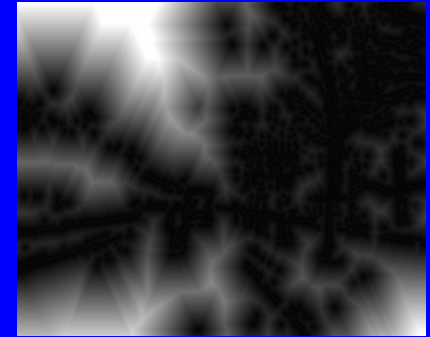
Quasi-distance corrigée

# Segmentation « granulométrique »



La quasi-distance appliquée à une image à teintes de gris permet de générer les distances, donc les tailles des régions plates → Marqueurs pour une segmentation basée sur la taille et la géométrie des régions.

# Gradient et quasi-distance



## Quasi-distance calculée sur le gradient inversé

- Une seule quasi-distance est calculée
- Hiérarchie de régions basée sur leurs contrastes relatifs (similaire à l'algorithme des cascades)
- La taille et la forme des régions est prise en compte (fermeture des régions pas parfaitement closes)

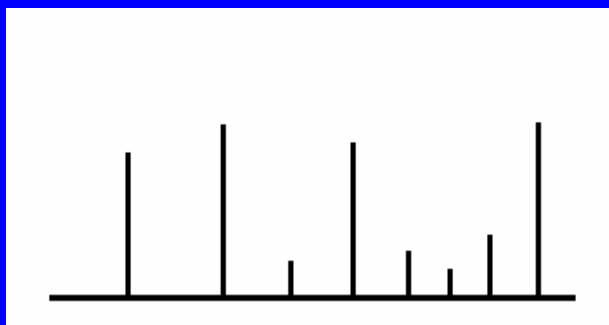
# Introduction aux empilements

- Approche différente des cascades mais avec des prémisses identiques

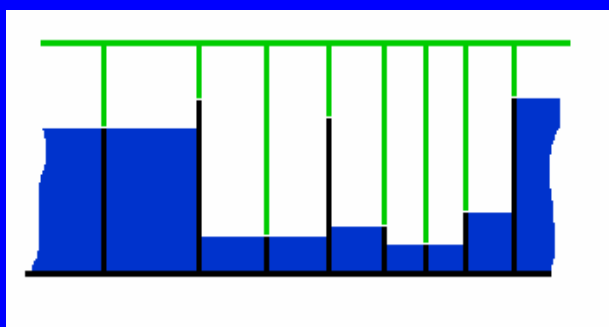
- Définition d'une transformée résiduelle

Approche définie sur des LPE valuées (supports des BV et des SBV confondus)

$$W_0 = \psi_0$$



$$\psi_1$$



On définit une fonction:

$$\xi_0 = \psi_0 \text{ sur } \text{Min}^c(\psi_0)$$

$$\xi_0 = \max \text{ sur } \text{Min}(\psi_0)$$

On définit alors:

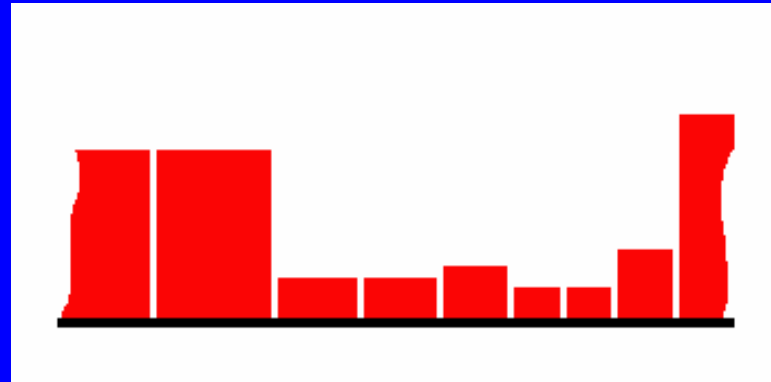
$$\psi_1 = R_{\xi_0}^*(\psi_0)$$

A la première étape,  $\psi_1$  est l'image hiérarchique car  $W_0$ , la LPE est le complémentaire des minima de  $\psi_0$

# Résidus d'empilements

On peut alors définir un premier résidu  $r_1$  par la différence entre  $\psi_1$  et  $\psi_0$ :

$$r_1 = \psi_1 - \psi_0$$

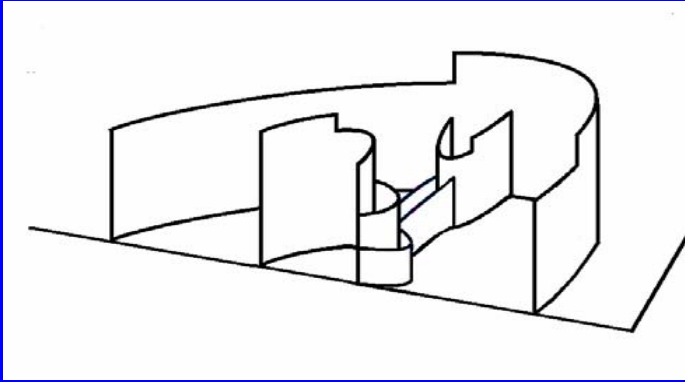


Ce résidu correspond aux empilements nécessaires pour combler les minima de  $\psi_0$

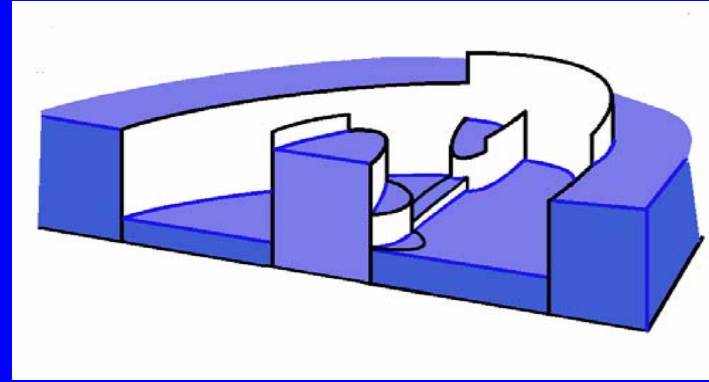
A l'étape suivante, la même transformation est définie en utilisant la fonction  $\xi_1$ , elle-même définie à partir des minima de  $\psi_1$

# Résidus d'empilements (2)

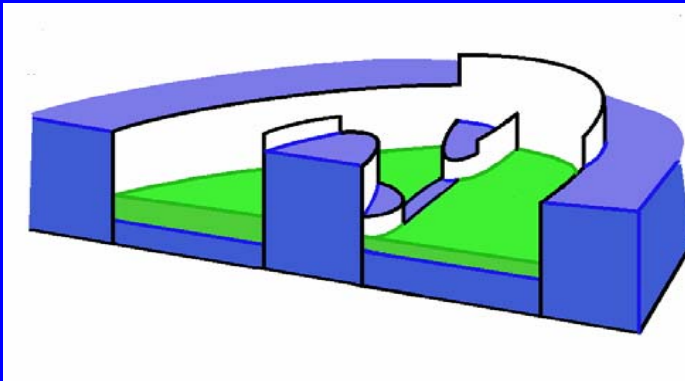
$\psi_0$



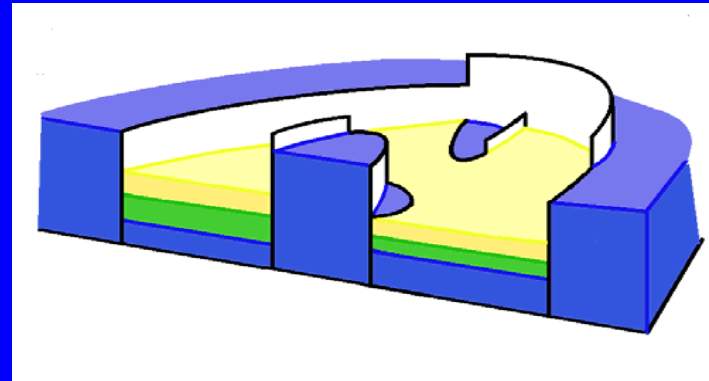
$\psi_1$



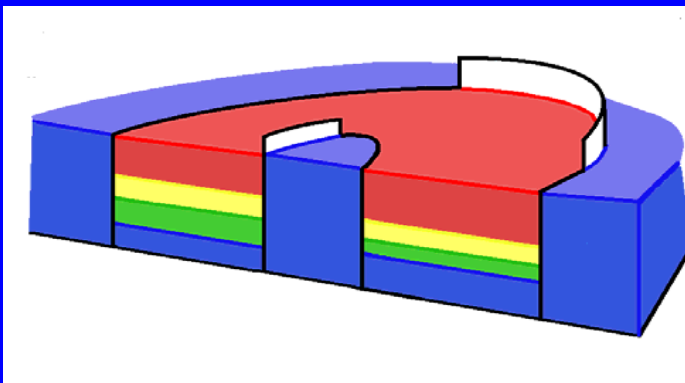
$\psi_2$



$\psi_3$



$\psi_4$



Transformations  $\psi_i$  et résidus successifs  $r_i$  (différentes couleurs)

# Transformation résiduelle

## Définition d'une transformée résiduelle par itération

$\psi_i$  est défini à partir de  $\psi_{i-1}$ :

$$\psi_i = R_{\xi_{i-1}}^*(\psi_{i-1})$$

avec:

$$\xi_{i-1} = \psi_{i-1} \text{ sur } \text{Min}^c(\psi_{i-1})$$

$$\xi_{i-1} = \max \text{ sur } \text{Min}(\psi_{i-1})$$

Le résidu  $r_i$  est égal à:

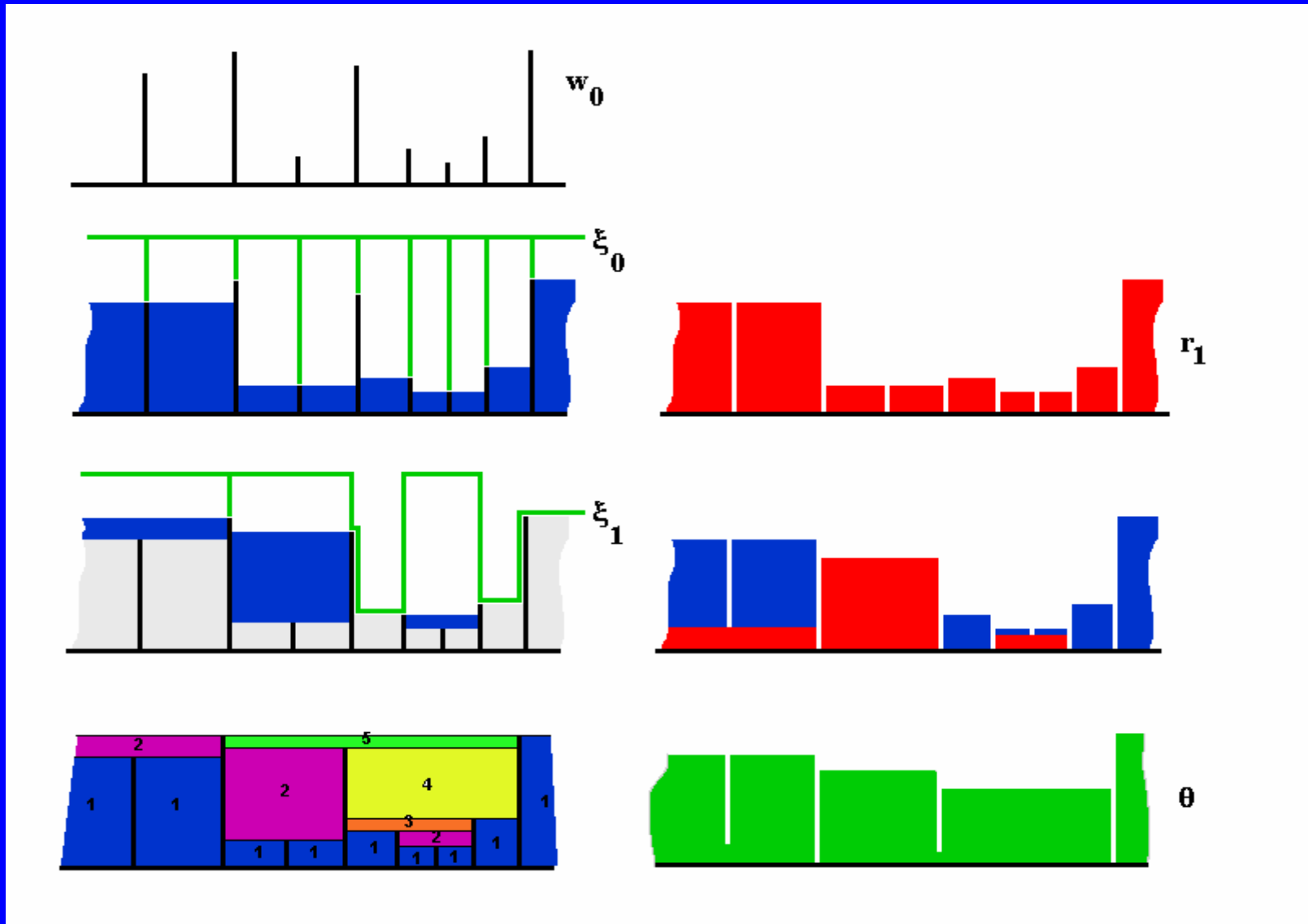
$$r_i = \psi_i - \psi_{i-1}$$

Enfin, on définit deux fonctions  $\theta$  et  $q$ :

$$\theta = \sup_{i \in I} (r_i) = \sup_{i \in I} (\psi_i - \psi_{i-1})$$

$$q = \arg \max (r_i) = \arg \max (\psi_i - \psi_{i-1})$$

# Transformation résiduelle (2)



Etapes de l'élaboration de la fonction  $\theta$

# Empilements et hiérarchie

- Les empilements recouvrent certains contours alors que d'autres sont préservés (fonction  $\theta$ )
- Les contours préservés demeurent dans  $\text{sup}(w_0, \theta)$ . On peut les extraire par chapeau haut-de-forme

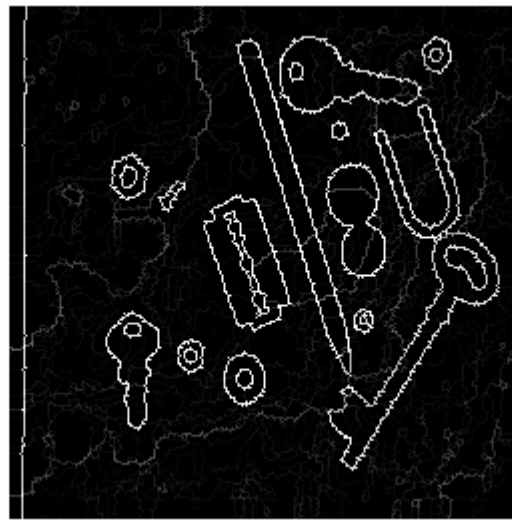
Quel est le critère de sélection des contours préservés?

- Algorithme des cascades (primitif):
  - Contours séparant des régions où les contours sont de hauteur inférieure à la hauteur maximale des contours préservés
- Résidus d'empilement:
  - Contours séparant des régions où les contours (s'ils existent) sont de hauteur au moins 2 fois plus faible que les contours de hauteur minimale préservés

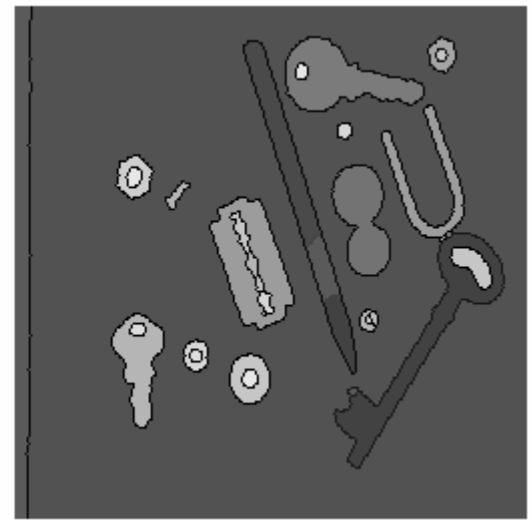
# Exemple



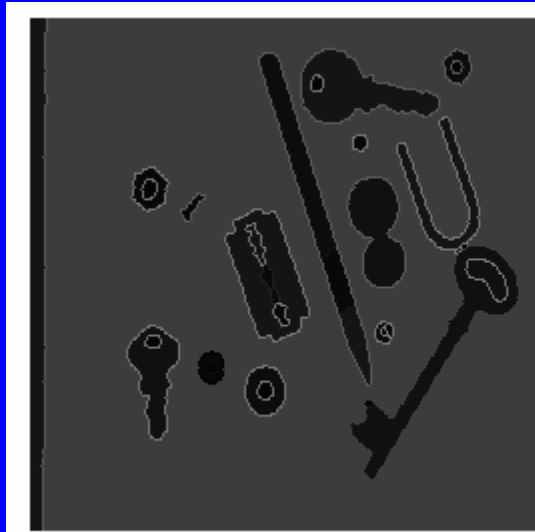
*Image originale*



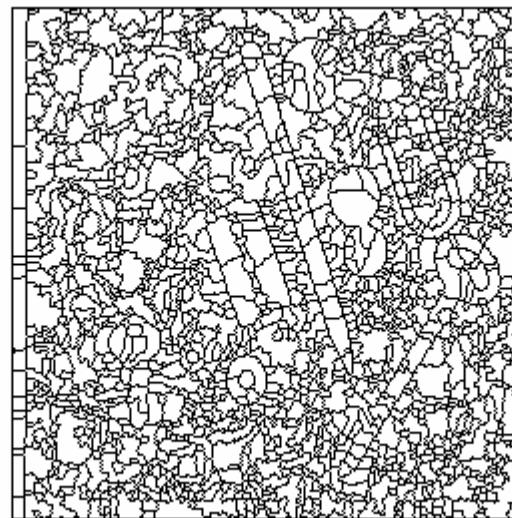
$\psi_0$



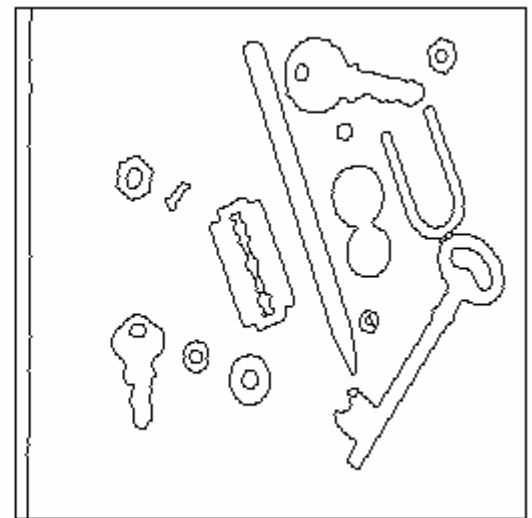
$\theta$



$q$



*Contours initiaux*



*Contours de  $\theta$*

# Perspectives

Les perspectives offertes par les opérateurs résiduels sont intéressantes:

- Fonctions granulométriques sur images de gris
- Segmentation plus fine d'ensembles (meilleure appréhension de la notion d'ensemble « patatoïdal »)
- Segmentation d'image non supervisée basée à la fois sur un critère de contraste ET de forme/taille (alternative à la hiérarchisation) → Approches non paramétriques
- Descriptions par empilement de cylindres (connexion avec certains modèles d'ensembles aléatoires)
- Utilisation d'ouvertures diverses (par reconstruction, par critères, etc.)