Adjonctions : érosion et dilatation géodésique

Fernand Meyer

Centre de Morphologie Mathématique

19 mai 2016

Erosions et dilatations géodésiques qui commutent avec les anamorphoses

L'érosion et la dilatation géodésique

Pour une analyse approfondie de ces opérateurs, voir les cours de S.Beucher.
La première formulation de l'érosion géodésique numérique se trouve dans :
S.Beucher "Sur un problème de définition de l'érosion géodésique".
Nous allons revisiter ces questions et proposer quelques preuves nouvelles des principaux résultats.

La dilatation géodésique binaire

Rappelons la définition de la dilatation géodésique d'un ensemble binaire $X \subset Z$ dans le masque Z :
$\delta_Z(X) = \delta(X) \cap Z$, où δ est la dilatation par un disque élémentaire (en discret, l'ensemble des voisins du point central) : $\delta(X) = \bigcup_{y \in X} B_y$.

L'itération jusqu'à stabilité $\delta_Z^{(\infty)}(X)$ de cette opérateur permet de "reconstruire" les composantes connexes de Z qui contiennent des composantes connexes de X.

La dilatation géodésique numérique ou arasement

Considérons à présent une fonction f à "dilater sous" une fonction h, vérifiant $f \leq h$.
La dilatation géodésique $\delta_h f$ s'obtient seuil par seuil :
Pour le seuil λ : $\chi_\lambda \left(\delta_h f \right) = \delta_{\chi_\lambda (h)} \chi_\lambda (f)$.
L'itération jusqu'à idempotence de cet opérateur permet de reconstruire la fonction h au dessus de la fonction h.
A l'opérateur binaire $\delta_Z(X) = \delta(X) \cap Z$ correspond alors la dilatation géodésique numérique : $\delta_h(f) = \delta(f) \wedge h$
On parle aussi d'ouverture par reconstruction de f sous la fonction h. Il s'agit aussi du plus grand arasement de f au dessus de h.

Une double dualité

Une double dualité transforme un arasement en inondation

L'opérateur $\delta_h(f) = \delta(f) \wedge h$ a 2 arguments : les fonctions f et h.
Si on prend comme complémentation la négation : $f \to -f$, on peut alors définir un opérateur doublement dual :
$\varepsilon_h f = \widetilde{\delta_h(f)} = -\left[\delta(-f) \wedge (-h)\right] = -\left[-\varepsilon(f) \wedge (-h)\right] = \varepsilon(f) \vee h$
On obtient ainsi une érosion géodésique de f au dessus de la fonction h.
L'itération jusqu'à idempotence de cet opérateur permet de reconstruire la fonction h sous la fonction h. On parle de fermeture par reconstruction. Il s'agit aussi de la plus haute inondation de f sous h.

Les inondations binaires

La version binaire de cet opérateur est simplement : $\varepsilon_Z(X) = \varepsilon(X) \cup Z$

L'inondation numérique

L'érosion géodésique duale $\varepsilon_h f$ s'obtient seuil par seuil :

Pour le seuil λ : $\chi_\lambda\left(\varepsilon_h f\right) = \varepsilon_{\chi_\lambda(h)}\chi_\lambda(f)$.

L'érosion géodésique duale

L'opérateur élémentaire de nivellement est le centre morphologique des deux opérateurs précédents :
$\lambda_h f = (h \wedge \delta f) \vee \varepsilon f = (h \vee \varepsilon f) \wedge \delta f$

Dualité n'est pas adjonction

Les opérateurs $\varepsilon(X) \cup Z$ et $\delta(X) \cap Z$ sont duaux l'un de l'autre. Il en va de même de $\varepsilon_h(f)$ et de $\delta_h(f)$, par une double dualité portant sur h et sur f. Pour passer d'un opérateur à l'autre on a les substitutions suivantes :
$\delta \leftrightarrow \varepsilon$
$\cap \leftrightarrow \cup$.
Mais ils ne sont pas adjoints.

La géodésie binaire

La géodésie binaire

Jusqu'ici les ensembles considérés étaient des parties du domaine $\mathcal{D}$.
Dans le cadre géodésique on choisit comme domaine une partie Z de $\mathcal{D}$ et on va définir des opérateurs sur l'ensemble $\wp(Z)$ des parties de Z.
On définit une distance géodésique entre les points de Z. Pour $x, y \in Z$, la distance géodésique $\theta(x, y)$ est la longueur du plus court chemin entre x et y inclus dans Z si un tel chemin existe et égal à ∞ s'il n'existe pas un tel chemin.
On peut ainsi définir la boule géodésique de centre $x \in Z$ et de rayon λ : $B_x^\lambda = \{y \in Z \mid \theta(x, y) < \lambda\}$
On remarque que $y \in B_x^\lambda \Leftrightarrow x \in B_y^\lambda$

La géodésie binaire

Dans le cas non géodésique, l'addition de Minkowski de X par un élément structurant B s'exprime par $\bigcup_{x \in X} \bigcup_{y \in B} x + y = \bigcup_{y \in B} X_y = \bigcup_{x \in X} B_x$.
La première forme $\bigcup_{y \in B} X_y$ ne peut se transposer directement au cadre géodésique, car si $X \subset Z$, il n'en va pas de même des translatés X_y.
Par contre pour tout x, $B_x \subset Z$ et on peut donc construire le dilaté géodésique $\bigcup_{x \in X} B_x$ à l'aide des boules géodésiques B_x.
La boule de rayon 1 centrée en x est simplement $\delta_Z \{x\} = \delta \{x\} \cap Z$.
La dilatation géodésique de taille n est obtenue en itérant n fois la dilatation géodésique de taille 1.

La géodésie binaire

Dans le cas non géodésique, l'addition de Minkowski de X par un élément structurant B s'exprime par $\bigcup\limits_{x\in X}\bigcup\limits_{y\in B} x+y = \bigcup\limits_{y\in B} X_y = \bigcup\limits_{x\in X} B_x$.

La première forme $\bigcup\limits_{y\in B} X_y$ ne peut se transposer directement au cadre géodésique, car si $X \subset Z$, il n'en va pas de même des translatés X_y.

Par contre pour tout x, $B_x \subset Z$ et on peut donc construire le dilaté géodésique $\bigcup\limits_{x\in X} B_x$ à l'aide des boules géodésiques B_x.

La boule de rayon 1 centrée en x est simplement $\delta_Z\{x\} = \delta\{x\} \cap Z$.

La dilatation géodésique de taille n est obtenue en itérant n fois la dilatation géodésique de taille 1.

L'érosion par dualité

Dans le cas où l'élément structurant est symétrique ($y \in B_x^\lambda \Leftrightarrow x \in B_y^\lambda$), alors l'érodé par dualité et l'érodé par adjonction sont identiques dans le cas non géodésique. Il en va encore de même dans le cas géodésique.
La dualité dans le cadre géodésique s'appuie sur la complémentation suivante.
Pour $X \subset Z : \complement_Z X = Z \backslash X = Z \cap \complement X = Z \cap \overline{X}$.
La construction du dual peut alors se faire par :
$Z \backslash \delta_Z(Z \backslash X) = Z \cap \overline{\left(\delta(Z \cap \overline{X}) \cap Z\right)}$
Or $\overline{\left(\delta(Z \cap \overline{X}) \cap Z\right)} = \varepsilon(\overline{Z} \cup X) \cup \overline{Z}$
et $Z \cap \overline{\left(\delta(Z \cap \overline{X}) \cap Z\right)} = \varepsilon(\overline{Z} \cup X) \cap Z$

Erosion et dilatation géodésique par masquage

Une adjonction de masquage

Revenons au cadre non géodésique. Etant donné un ensemble $Z \subset \mathcal{D}$, on va définir une dilatation $\mu_Z^0(X) = X \cap Z$ et une érosion $\mu_Z^1(X) = X \cup \overline{Z}$ qui s'appliquent à tout ensemble X de $\mathcal{D}$:
$X \cap Z \subset Y \Rightarrow (X \cap Z) \cup \overline{Z} \subset Y \cup \overline{Z} \Rightarrow X \cup \overline{Z} \subset Y \cup \overline{Z} \Rightarrow X \subset X \cup \overline{Z} \subset Y \cup \overline{Z}$
Montrons les implications inverses :
$X \subset Y \cup \overline{Z} \Rightarrow X \cap Z \subset \left(Y \cup \overline{Z}\right) \cap Z \Rightarrow X \cap Z \subset Y \cap Z \Rightarrow X \cap Z \subset Y \cap Z \subset Y$
Ainsi $(\mu_Z^0(X) = X \cap Z, \mu_Z^1(X) = X \cup \overline{Z})$ forment bien une adjonction dans laquelle $Z \subset \mathcal{D}$ est fixé et $X \subset \mathcal{D}$ quelconque.

Une adjonction dérivée du masquage

Soient une adjonction (δ, ε) s'appliquant à tout ensemble $X \subset \mathcal{D}$.
$(\mu_Z^0(X) = X \cap Z, \mu_Z^1(X) = X \cup \overline{Z})$ en est une autre.
Par composition on obtient alors l'adjonction $(\mu_Z^0 \delta, \varepsilon \mu_Z^1)$ prenant les valeurs suivantes :
$\mu_Z^0 \delta X = \delta X \cap Z$ et $\varepsilon \mu_Z^1 X = \varepsilon \left(X \cup \overline{Z} \right)$ pour tout ensemble $X \subset \mathcal{D}$

Retour au cadre géodésique

Nous fixons à présent $Z \subset \mathcal{D}$ et considérons les parties de Z.
Soit alors $X, Y \subset Z$: $\mu_Z^0 \delta X = \delta X \cap Z \subset Y \Rightarrow X \subset \varepsilon \mu_Z^1 Y = \varepsilon(Y \cup \overline{Z})$
Ainsi $X \subset Z$ et $X \subset \varepsilon(Y \cup \overline{Z})$ d'où $X \subset \varepsilon(Y \cup \overline{Z}) \cap Z$
Voyons les implications inverses:
$X \subset \varepsilon(Y \cup \overline{Z}) \cap Z \Rightarrow X \subset \varepsilon(Y \cup \overline{Z}) = \varepsilon \mu_Z^1 Y \Rightarrow \mu_Z^0 \delta X = \delta X \cap Z \subset Y$
Nous avons donc établi que dans le cadre géodésique des parties de Z, l'opérateur $\delta_Z X = \delta X \cap Z$ est une dilatation et $\varepsilon_Z X = \varepsilon(X \cup \overline{Z}) \cap Z$ son érosion adjointe.
On retrouve ainsi la forme de l'érosion géodésique que nous avons établi plus haut par dualité.
Remarque : Il est intéressant de voir que les érodés adjoints de $\delta_Z X = \delta X \cap Z$ ne sont pas les mêmes lorsqu'on considère ou non le cadre géodésique.

Passage aux fonction : transformation seuil par seuil

Les opérateurs de seuillage

Toute fonction peut être reconstruite à partir de ses seuil successifs :
$f = \bigvee_\lambda \lambda \ \chi_\lambda(f)$ avec $\chi_\lambda(f) = \{x \in E, \ f(x) \geq \lambda\}$.
Les seuils $\chi_\lambda(f)$ sont des ensembles décroissants avec λ.
Inversement, si on dispose d'une suite X_λ, décroissante avec λ, on peut reconstruire la fonction $\bigvee_\lambda \lambda \ X_\lambda$.

Construction de la dilatation seuil par seuil

On considère deux fonctions f et h vérifiant $f < h$ et on cherche la dilatation géodésique et l'érosion géodésique de f sous h.
Les seuils successifs $\chi_\lambda(f)$ et $\chi_\lambda(h)$ sont décroissants avec λ et $\chi_\lambda(f) \subset \chi_\lambda(h)$.
Les dilatés géodésiques $\delta_{\chi_\lambda(h)}(\chi_\lambda(f)) = \delta\left[\chi_\lambda(f)\right] \cap \chi_\lambda(h)$ sont des ensembles décroissants avec λ. On peut donc construire une fonction $\bigvee_\lambda \lambda\ \delta_{\chi_\lambda(h)}(\chi_\lambda(f))$.
Il n'en va pas de même des érodés géodésiques $\varepsilon_{\chi_\lambda(h)}(\chi_\lambda(f)) = \varepsilon\left[\chi_\lambda(f) \cup \overline{\chi_\lambda(h)}\right] \cap \chi_\lambda(h)$. En effet $\chi_\lambda(h)$ et $\chi_\lambda(f)$ sont décroissants alors que $\overline{\chi_\lambda(h)}$ est croissant avec λ.

Notations

Pour éviter des notations trop lourdes on utilise les correspondances suivantes :

- $\chi_\lambda(f) = \{x \in E,\, f(x) \geq \lambda\} \leftrightarrow f^\lambda$
- $\varepsilon_{\chi_\lambda(h)} \leftrightarrow \varepsilon_h^\lambda$ et $\delta_{\chi_\lambda(h)} \leftrightarrow \delta_h^\lambda$
- $\varepsilon'_{\chi_\lambda(h)}(f) \leftrightarrow \varepsilon_h^\lambda f$ et $\delta_{\chi_\lambda(h)}(f) \leftrightarrow \delta_h^\lambda f$
- $\varepsilon_{\chi_\kappa(h)}(\chi_\lambda(f)) \leftrightarrow \varepsilon_h^\kappa f^\lambda$ et $\delta_{\chi_\kappa(h)}(\chi_\lambda(f)) \leftrightarrow \delta_h^\kappa f^\lambda$

Avec ces notations, l'adjonction géodésique binaire appliquée aux seuils de deux fonctions f et g sous une fonction h s'exprime par :
$\delta_h^\lambda f^\lambda < g^\lambda \Leftrightarrow f^\lambda < \varepsilon_h^\lambda f^\lambda$

Construction de l'érosion géodésique seuil par seuil ?

On considère deux fonctions f et h vérifiant $f < h$ et on cherche la dilatation géodésique et l'érosion géodésique de f sous h.
Les seuils successifs f^λ et h^λ sont décroissants avec λ et $f^\lambda \subset h^\lambda$.
Les érodés géodésiques $\varepsilon_h^\lambda f^\lambda = \varepsilon \left[f^\lambda \cup \overline{h^\lambda} \right] \cap h^\lambda$ ne sont ni croissants ni décroissants avec λ.
En effet h^λ et f^λ sont décroissants alors que $\overline{h^\lambda}$ est croissant avec λ.
Par contre $\bigwedge\limits_{\kappa \leq \lambda} \varepsilon_h^\kappa f^\kappa$ est une fonction décroissante avec λ, car on prend l'inf d'un nombre croissant de fonctions.
La fonction $\bigvee_\lambda \lambda \bigwedge\limits_{\kappa \leq \lambda} \varepsilon_h^\kappa f^\kappa$ est donc bien une fonction. S'agit-t-il de l'érosion géodésique adjointe de la dilatation géodésique ?

Trouver l'adjoint de la dilatation géodésique numérique

Recherche de l'adjoint du dilaté géodésique d'une fonction : implication directe

Soient trois fonctions (f, g, h) vérifiant : $f, g \leq h$
On a alors les implications suivantes :
$\delta_h f < g \Rightarrow \forall \kappa : \delta_h^\kappa f^\kappa < g^\kappa \Rightarrow \forall \kappa : f^\kappa < \varepsilon_h^\kappa g^\kappa \Rightarrow \forall \lambda, \forall \kappa \leq \lambda : f^\kappa < \varepsilon_h^\kappa g^\kappa \Rightarrow \forall \lambda : \bigwedge\limits_{\kappa \leq \lambda} f^\kappa = f^\lambda < \bigwedge\limits_{\kappa \leq \lambda} \varepsilon_h^\kappa g^\kappa$
$\Rightarrow \bigvee\limits_{\lambda} \lambda f^\lambda = f < \bigvee\limits_{\lambda} \lambda \bigwedge\limits_{\kappa \leq \lambda} \varepsilon_h^\kappa g^\kappa$
Pour être sûr que $\bigvee\limits_{\lambda} \lambda \bigwedge\limits_{\kappa \leq \lambda} \varepsilon_h^\kappa g^\kappa$ est bien l'érosion adjointe $\varepsilon_h f$ de $\delta_h f$, il faut montrer l'implication inverse.

Recherche de l'adjoint du dilaté géodésique d'une fonction : implication inverse

On suppose à présent $f < \bigvee_\lambda \lambda \bigwedge_{\kappa\leq\lambda} \varepsilon_h^\kappa g^\kappa$

$f < \bigvee_\lambda \lambda \bigwedge_{\kappa\leq\lambda} \varepsilon_h^\kappa g^\kappa \Rightarrow \forall\lambda : f^\lambda < \bigwedge_{\kappa\leq\lambda} \varepsilon_h^\kappa g^\kappa \Rightarrow \forall\lambda, \forall\kappa \leq \lambda : f^\lambda < \varepsilon_h^\kappa g^\kappa \Rightarrow$
$\forall\lambda, \forall\kappa \leq \lambda : \delta_h^\kappa f^\lambda < g^\kappa \Rightarrow \forall\lambda : \delta_h^\lambda f^\lambda < g^\lambda$
$\Rightarrow \delta_h f = \bigvee_\lambda \lambda \delta_h^\lambda f^\lambda < \bigvee_\lambda \lambda g^\lambda = g$

Ce qui établit l'implication inverse.
Les opérateurs $\delta_h f = \delta f \wedge h$ et $\varepsilon_h f = \bigvee_\lambda \lambda \bigwedge_{\kappa\leq\lambda} \varepsilon_h^\kappa f^\kappa$ forment donc bien une adjonction pour l'ensemble des fonctions $\leq h$.
L'expression de l'adjonction n'est pas très commode. Nous allons en établir une autre, plus facile et rapide à implémenter. Nous utilisons encore l'adjonction.
Comme l'adjoint d'un opérateur est unique, cela établira l'équivalence des 2 formulations de l'érodé géodésique.

Adjoint du dilaté géodésique d'une fonction ? 2-e méthode

Nous prenons à présent la forme usuelle de la dilatation géodésique de f sous h : $\delta_h f(x) = [\bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y)] \wedge h(x)$. Cherchons l'expression de son érosion duale. On suppose $[\bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y)] \wedge h(x)$

On considère trois fonctions (f, g, h) vérifiant : $f, g \leq h$

Adjoint du dilaté géodésique d'une fonction ? 2-e méthode

Premier cas: $h(x) > g(x)$, alors

$$[\bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y)] \wedge h(x) \leq g(x) \Rightarrow \bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y) \leq g(x)$$

On a alors les implications suivantes :

$h(x) > g(x)$ et $\bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y) \leq g(x) \Rightarrow$ pour x, y voisins et

$$h(x) > g(x) : f(y) \leq g(x) \Rightarrow f(y) \leq \bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x) > g(x)}} g(x)$$

Adjoint du dilaté géodésique d'une fonction ? 2-e méthode

Par ailleurs, montrons que $f(y) \leq g(y)$
Si $h(y) = g(y)$, alors comme $f(y) \leq h(y)$ on a $f(y) \leq g(y)$
Si $h(y) > g(y)$, alors y fait partie de la famille des voisins x de y vérifiant $h(x) > g(x)$
Il en résulte $\bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) \leq g(y)$ et $f(y) \leq \bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) \leq g(y)$
Quelque soit la valeur de $g(y)$ on a montré que $f(y) \leq g(y)$
Regroupant les 2 inégalités $f(y) \leq \bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x)$ et $f(y) \leq g(y)$, on obtient
Dans le cas où il existe un voisin x de y vérifiant :
$h(x) > g(x)$: $f(y) \leq \bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) \wedge g(y)$.

Adjoint du dilaté géodésique d'une fonction ? 2-e méthode

Deuxième cas : $\forall x$ voisin de y : $h(x) = g(x)$: $\bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) = \infty$

Mais on a en particulier $h(y) = g(y)$. Or $f(y) \leq h(y)$ donc $f(y) \leq g(y)$
Ainsi $f(y) \leq \bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) \wedge g(y)$

Ainsi, dans tous les cas on a :
$\delta_h f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(y) \leq \bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) \wedge g(y)$

Adjoint du dilaté géodésique d'une fonction ? 2-e méthode

On a ainsi montré que $\delta_h f(x) \leq g(x)$ implique
$f(y) \leq \bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) \wedge g(y)$.
Pour être sûr que $\bigwedge_{\substack{y,x \text{ voisins} \\ h(x)>g(x)}} g(x) \wedge g(y)$ est bien l'adjoint de $\delta_h f(y)$, il faut montrer l'implication inverse.

Implication inverse.

On suppose $\varepsilon_h g(y) = \bigwedge_{\substack{z \text{ voisin de } y \\ h(z)>g(z)}} g(z) \wedge g(y) \geq f(y)$.

$f(y) \leq \bigwedge_{\substack{z \text{ voisin de } y \\ h(z)>g(z)}} g(z) \wedge g(y) \leq [\bigwedge_{\substack{z \text{ voisin de } y \\ h(z)>g(z)}} g(z)] \Rightarrow$

Pour z voisin de y vérifiant $h(z) > g(z)$: $f(y) \leq g(z)$

Implication inverse.

Premier cas :

y a un voisin x vérifiant $h(x) > g(x)$, on a alors $f(y) \leq g(x)$.
Ainsi $f(y) \leq g(x)$ est vérifiée pour tous les voisins y de x, d'où
or $h(x) > g(x)$, donc si y et x sont voisins, on a
$f(y) \leq g(x) \Rightarrow \bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y) \leq g(x)$
Et $\bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y) \leq g(x) \Rightarrow [\bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y)] \wedge h(x) \leq g(x) \wedge h(x) = g(x)$
car $h(x) > g(x)$

Implication inverse.

Cas 2 : y n'a aucun voisin x vérifiant $h(x) > g(x)$.

Pour chaque voisin x de y : $g(x) = h(x)$
Alors $\delta_h f(x) = \bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y) \wedge h(x) \leq h(x) = g(x)$ ce qui établit l'implication inverse.

Ainsi, dans tous les cas de figure on a $\bigvee_{y,x \text{ voisins}} f(y) \wedge h(x) \leq g(x)$
On a donc bien une adjonction :
$\varepsilon_h g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow g(x) \geq \delta_h f(x)$

Où on retrouve la formulation de l'érosion géodésique de Serge Beucher

Nous avons trouvé l'expression de l'érosion géodésique de g sous la fonction h : $\varepsilon_h g(y) = \left[\bigwedge_{\substack{z \text{ voisin de } y \\ h(z) > g(z)}} g(z) \right] \wedge g(y)$

Si on définit une fonction masque $m = o$ sur $\{h > g\}$ et $m = \omega$ sur $\{h = g\}$, cette expression peut se récrire : $\varepsilon(g \vee m) \wedge g$, qui est précisément l'expression proposée par Serge Beucher.

Erosion et dilatation géodésique : nouvelle preuve utilisant le masquage

Rappelons la définition de l'adjonction de masquage. Si Z est une partie de $\mathcal{D}$, les deux opérateurs suivants forment une adjonction:

- la dilatation définie par $\mu_Z^o f = f$ sur l'ensemble Z et $\mu_Z^o f = o$ sur $\overline{Z}$
- l'érosion $\mu_Z^\omega f = f$ sur l'ensemble Z et $\mu_Z^\omega f = \omega$ sur $\overline{Z}$

Erosion et dilatation géodésique : nouvelle preuve utilisant le masquage

Supposons que $\delta f(x) \wedge h(x) \leq g(x)$ et cherchons l'expression de l'érosion adjointe.
On remarque que si $g(x) < h(x)$ alors
$\delta f(x) \wedge h(x) \leq g(x) \Rightarrow \delta f(x) \leq g(x)$
Ceci est vrai pour tous les pixels vérifiant $h < g$
Ainsi si $Z = \{h > g\} : \mu_Z^0 \delta f \leq g$
On en déduit par adjonction : $f \leq \varepsilon \mu_Z^\infty g$

Montrons que par ailleurs $f \leq g$:
si $x \in Z$, $\varepsilon \mu_Z^\infty g(x) \leq g(x)$ et $f \leq \varepsilon \mu_Z^\infty g \Rightarrow f(x) \leq g(x)$
si $x \notin Z$: $h(x) = g(x)$, mais comme $f \leq h$ on a $f(x) \leq g(x)$

Ainsi $f \leq g$ et $f \leq \varepsilon \mu_Z^\infty g$, d'où $f \leq \varepsilon \mu_Z^\infty g \wedge g$

Erosion et dilatation géodésique : nouvelle preuve utilisant le masquage

Nous avons vu que $\delta f \wedge h \leq g \Rightarrow f \leq \varepsilon\mu_Z^{\infty} g \wedge g$ pour $Z = \{h > g\}$
Montrons l'implication inverse. On suppose $f \leq \varepsilon\mu_Z^{\infty} g \wedge g$

$f \leq \varepsilon\mu_Z^{\infty} g \wedge g \leq \varepsilon\mu_Z^{\infty} g \Rightarrow \mu_Z^0 \delta f \leq g$
Or $g \leq h$, donc $\mu_Z^0 \delta f \leq g \Rightarrow \mu_Z^0 \delta f \wedge h \leq g$

En particulier pour $x \in Z$: $\delta f(x) = \mu_Z^0 \delta f(x)$ d'où $\delta f(x) \wedge h(x) \leq g(x)$
Si $x \notin Z$: $h(x) = g(x)$ alors $\delta f(x) \wedge h(x) \leq h(x) = g(x)$

Finalement on a dans tous les cas : $\delta f \wedge h \leq g$ ce qui montre l'implication inverse. Les opérateur s$\delta f \wedge h$ et $\varepsilon\mu_Z^{\infty} g \wedge g$ pour $Z = \{h > g\}$ sont bien adjoints.

Erosion et dilatation géodésique

Nous avons ainsi obtenu, par adjonction, plusieurs expressions équivalentes de l'érosion géodésique.
Comme l'adjoint est unique, toutes ces expressions sont égales. On suppose $f \leq h$
La dilatation géodésique a la forme suivante : $\delta_h f = \delta f \wedge h$
L'érosion géodésique a les formes suivantes :

- $\varepsilon_h f = \bigvee_\lambda \lambda \bigwedge_{\kappa \leq \lambda} \varepsilon_h^\kappa f^\kappa$
- $\varepsilon_h f(y) = [\bigwedge_{\substack{z \text{ voisin de } y \\ h(z) > f(z)}} f(z)] \wedge f(y)$
- Si on définit $m = o$ sur $\{h > f\}$ et $m = \omega$ sur $\{h = f\}$, cette expression peut se récrire : $\varepsilon_h f = \varepsilon(f \vee m) \wedge f$
- $\varepsilon_h f = \varepsilon \mu_Z^\infty f \wedge f$ pour $Z = \{h > f\}$