

Divers modes de construction d'adjonctions pour des images

Fernand Meyer

Centre de Morphologie Mathématique

29 mai 2016

\mathcal{T} = un treillis totalement ordonné, \mathcal{D} = ensemble quelconque = domaine de définition des fonctions. Pour des images digitales, \mathcal{D} = trame.

Pour des images binaires $\mathcal{T} = (0, 1)$; pour des images à niveaux de gris : $\mathcal{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^+, \mathbb{N}, [0, 255]$.

o , le plus petit élément de \mathcal{T} et ω , le plus grand de \mathcal{T}

Les images sont alors des fonctions définies sur \mathcal{D} et prenant leur valeur dans \mathcal{T} : $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{T})$

Ensembles binaires : l'addition de Minkowski

Dilatation invariante par translation appliquée à un ensemble binaire

On choisit un point $O \in \mathcal{D}$ comme origine O . A tout point $x \in \mathcal{D}$ on associe la translation \overrightarrow{Ox} .

Inversement on associe à toute translation de vecteur \vec{v} le translaté de O par \vec{v} . Le point x est obtenu par translation de l'origine par le vecteur \overrightarrow{Ox} .

On désignera par $x + y$ la translation de vecteur $\overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}$ **et** le point obtenu par translation de vecteur $\overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}$ appliqué à l'origine O .

Dilatation invariante par translation appliquée à un ensemble binaire

Etant donnés deux ensembles binaires X et Y et une origine des coordonnées O , on définit alors l'addition de Minkowski par :

$$X \oplus Y = \bigcup_{x \in X, y \in Y} x + y$$

Si on désigne par Y_x le translaté de l'ensemble Y par le vecteur \vec{Ox} , on a :

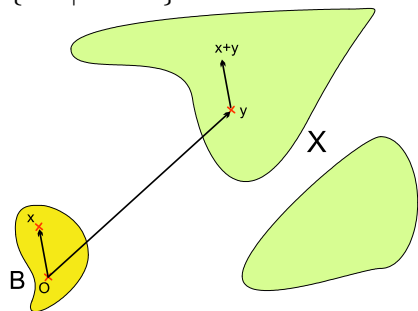
$$\bigcup_{x \in X, y \in Y} x + y = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{y \in Y} x + y = \bigcup_{x \in X} Y_x$$

et de manière similaire :

$$\bigcup_{x \in X, y \in Y} x + y = \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{x \in X} x + y = \bigcup_{y \in Y} X_y$$

Dilatation invariante par translation appliquée à un ensemble binaire

Souvent on particularise un des ensembles X ou Y . On appelle élément structurant un ensemble B , représentant la famille de translations $B = \{\vec{Ox} \mid x \in B\}$

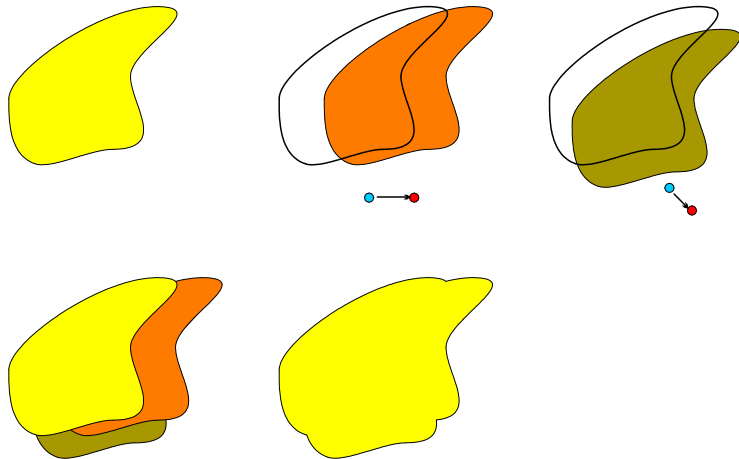


La dilatation de l'ensemble X par l'ensemble structurant B est définie par

$$X \oplus B = \delta_B X = \bigcup_{x \in X, t \in B} x + y = \bigcup_{t \in B} X_t = \bigcup_{x \in X} B_x$$

Expression 1 de la dilatation

$$X \oplus B = \delta_B X = \bigcup_{x \in X, t \in B} x + y = \bigcup_{t \in B} X_t$$



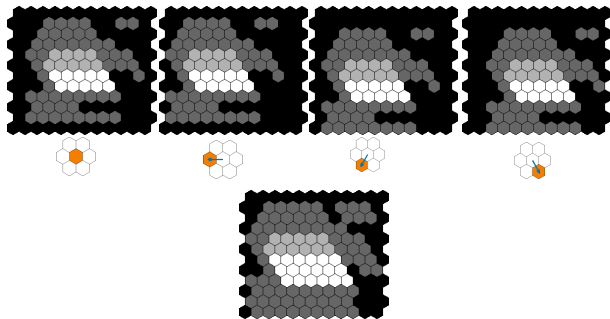
Un ensemble binaire X peut se définir par sa fonction indicatrice 1_X .
On peut alors écrire la dilatation comme un supremum de fonctions.

$$\delta_B X = \bigcup_{x \in B, y \in X} x + y = \bigcup_{x \in B} X_x = \bigvee_{x \in B} (1_X)_x$$

En remplaçant la fonction indicatrice 1_X par une fonction quelconque f :

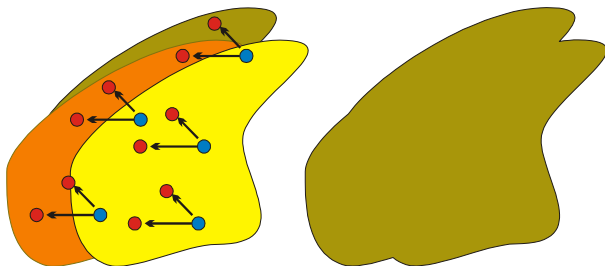
$$\delta_B f = \bigvee_{x \in B} f_x$$

Supremum de translations



Expression 2 de la dilatation pour les ensembles binaires

$$\delta_B X = \bigcup_{y \in X} \bigcup_{x \in B} x + y = \bigcup_{y \in X} B_y$$



Erosion adjointe de l'addition de Minkowski

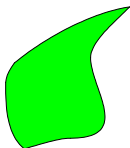
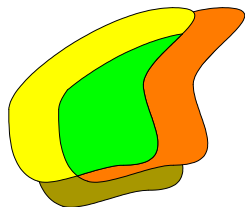
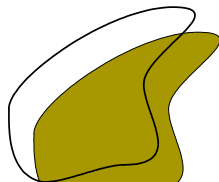
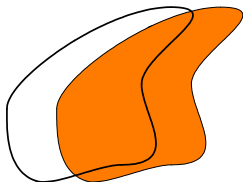
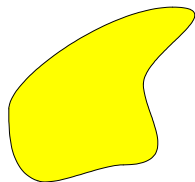
L'érosion adjointe d'une dilatation

$$\bigcup_{x \in B} X_x \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in B : X_x \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in B : X \subset Y_{-x} \Leftrightarrow X \subset \bigwedge_{x \in B} Y_{-x}$$

On obtient l'érosion ε_B adjointe de la dilatation $\delta_B : \varepsilon_B Y = \bigwedge_{x \in B} Y_{-x}$

$(\bigcup_{x \in B} X_x, \bigwedge_{x \in B} X_{-x})$ forment une adjonction.

Infimum de translations



Expression de l'érosion adjointe de la dilatation pour les fonctions

$$\bigvee_{x \in B} f_x < g \Leftrightarrow \forall x \in B : f_x < g \Leftrightarrow \forall x \in B : f \subset g_{-x} \Leftrightarrow f < \bigwedge_{x \in B} g_{-x}$$

On obtient l'érosion ε_B adjointe de la dilatation δ_B : $\varepsilon_B g = \bigwedge_{x \in B} g_{-x}$

En appelant \check{B} l'élément structurant symétrique de B :

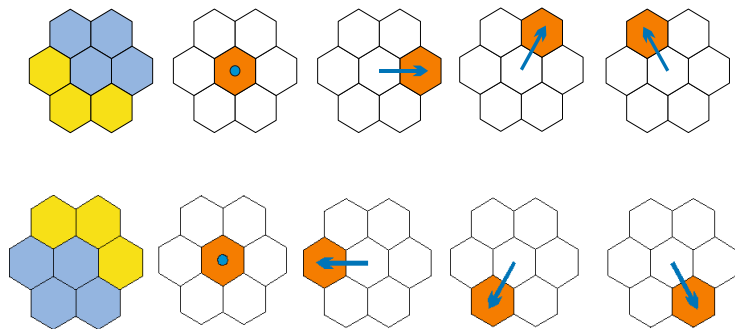
$$\begin{aligned} \bigvee_{y \in B_x} f(y) < g(x) &\Leftrightarrow \forall y \in B_x : f(y) < g(x) \Leftrightarrow \forall x \in \check{B}_y : f(y) < g(x) \\ &\Leftrightarrow f(y) < \bigwedge_{x \in \check{B}_y} g(x) \end{aligned}$$

Element structurant et élément structurant symétrique

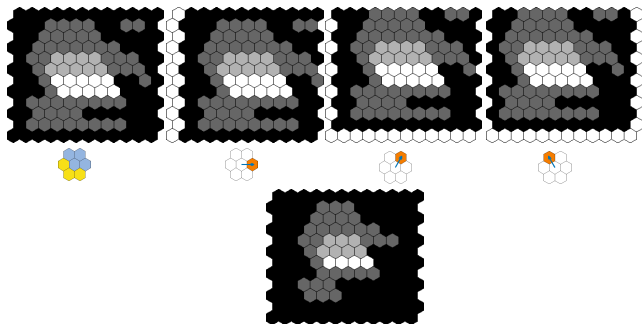
$$\bigvee_{x \in B} f_x < g \Leftrightarrow \forall x \in B : f_x < g \Leftrightarrow \forall x \in B : f \subset g_{-x} \Leftrightarrow f < \bigwedge_{x \in B} g_{-x} = \bigwedge_{y \in \check{B}} g_y$$

après avoir fait le changement de variable $y = -x$.

Un élément structurant et son élément structurant symétrique :



Infimum de translations



Un florilège d'adjonctions

Si ζ et χ sont 2 opérateurs croissants et inverses l'un de l'autre, ils forment une adjonction:

Si f et g sont 2 fonctions, on a la suite des équivalences suivantes:

$$\zeta f < g \Leftrightarrow \chi \zeta f < \chi g \Leftrightarrow f < \chi g.$$

ζ et χ étant interchangeables, cela montre qu'ils sont simultanément érosion et dilatation.

Si on attache à chaque point x d'un élément structurant une dilatation ζ_x et son érosion adjointe χ_x , alors on en dérive une nouvelle adjonction

$$\bigvee_{x \in B} \zeta_x f \text{ et } \bigwedge_{x \in B} \chi_x f.$$

En effet:

$$\bigvee_{x \in B} \zeta_x f < g \Leftrightarrow \forall x \in B : \zeta_x f < g \Leftrightarrow \forall x \in B : f < \chi_x g \Leftrightarrow f < \bigwedge_{x \in B} \chi_x g$$

Cas particulier: Si ζ_x et χ_x sont 2 opérateurs croissants et inverses l'un de l'autre. Alors $(\bigvee_{x \in B} \chi_x f, \bigwedge_{x \in B} \zeta_x f)$ et $(\bigvee_{x \in B} \zeta_x f, \bigwedge_{x \in B} \chi_x f)$ forment 2 couples d'adjonctions.

Nouvelle écriture pour l'érosion et la dilatation

Soit θ_x la translation selon le vecteur \vec{Ox} , O étant l'origine et $x \in B$.

On écrit θ_{-x} pour la translation selon le vecteur \vec{xO} .

Or θ_x et θ_{-x} sont croissants et inverses l'un de l'autre et forment donc une adjonction.

Alors $\bigvee_{x \in B} \theta_x f$ et $\bigwedge_{x \in B} \theta_{-x} f$ forment une adjonction, ce qu'on savait déjà car

$$\bigvee_{x \in B} \theta_x f = \bigvee_{x \in B} f_x \text{ et } \bigwedge_{x \in B} \theta_{-x} f = \bigwedge_{x \in B} f_{-x}.$$

De même $\bigvee_{x \in B} \theta_{-x} f$ et $\bigwedge_{x \in B} \theta_x f$ forment une adjonction.

Dilatation et érosion par des éléments structurants non plats.

Autre exemple: Les opérateurs suivants permettent de faire des érosions et dilatations non planes.

Pour $x \in B$: $\zeta_x f = f_x + \eta(x)$ et $\chi_x f = f_{-x} - \eta(x)$

Si B est un disque de rayon ρ , alors $\eta(x) = \rho - |x|$ permet de faire une dilatation par un "cône pointe en haut" et une érosion par un "cône pointe en bas".

Adjonctions associées à une famille d'adjonctions

Adjonction dérivée d'une famille d'adjonctions.

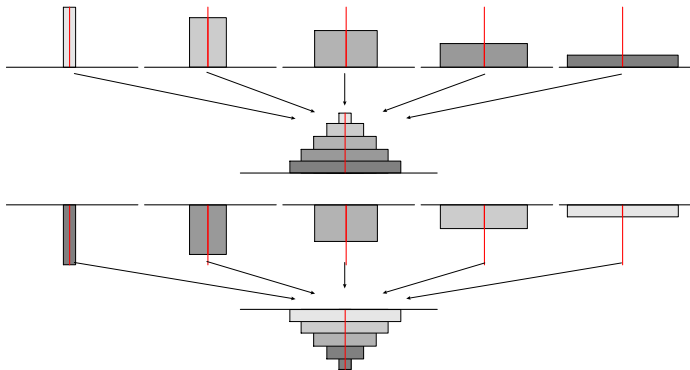
Soient δ_λ et ε_λ la dilatation et érosion plane par un disque de rayon λ .

On obtient ainsi une famille d'adjonctions $(\delta_\lambda, \varepsilon_\lambda)$ indicées par la taille du disque.

Alors si η est une fonction de λ , $\delta_\lambda f - \eta(\lambda)$ et $\varepsilon_\lambda f + \eta(\lambda)$ forment encore une adjonction.

Par exemple si $\eta(\lambda) = \lambda$, on obtient ainsi une dilatation par une cône $\bigvee_{\lambda>0} (\delta_\lambda f - \lambda)$ et son érosion adjointe $\bigwedge_{\lambda>0} (\varepsilon_\lambda f + \lambda)$

Dilaté d'une fonction pulse par $\bigvee_{h>0} (\delta_h f - h)$ et érodé d'une fonction pulse inverse par $\bigwedge_{h>0} (\varepsilon_h f + h)$



Cas particulier : les lambda nivellements

Si δ et ε sont resp. la dilatation et l'érosion élémentaires, dans laquelle l'élément structurant est composé du pixel central et de ses premiers voisins :

- $\delta_\lambda g = g \vee (\delta g - \lambda)$ constitue une dilatation élémentaire par un cône pointe en haut de pente λ
- $\varepsilon_\lambda g = g \wedge (\varepsilon g + \lambda)$ constitue une érosion élémentaire par un cône pointe en bas de pente λ .

Une fonction g sera alors un lambda nivellement de la fonction f si $f \wedge [g \vee (\delta g - \lambda)] \leq g \leq f \vee [g \wedge (\varepsilon g + \lambda)]$.

Si ce n'est pas le cas, on modifie g jusqu'à ce soit le cas.

Les lambda nivellements : un critère équivalent

Le critère $g \leq f \vee [g \wedge (\varepsilon g + \lambda)]$ peut s'interpréter ainsi :

$$g \leq f \vee [g \wedge (\varepsilon g + \lambda)] \Leftrightarrow g \leq f \text{ ou } g \leq g \wedge (\varepsilon g + \lambda)$$

$$\Leftrightarrow g \leq f \text{ ou } g \leq \varepsilon g + \lambda \Leftrightarrow \{g > \varepsilon g + \lambda \Rightarrow g \leq f\}$$

$$\Leftrightarrow \{\forall p, q \text{ voisins} : g_p > g_q + \lambda \Rightarrow g_p \leq f_p\}$$

De même

$$\{f \wedge [g \vee (\delta g - \lambda)] \leq g\} \Leftrightarrow \{\forall p, q \text{ voisins} : g_p < g_q - \lambda \Rightarrow g_p \geq f_p\}$$

Ensemble, ces deux critères signifient que si une transition de g entre 2

pixels voisins est plus large que λ : $g_p < g_q - \lambda$

alors la transition de f entre ces deux pixels est plus grande et l'encadre :

$$f_p \leq g_p < g_q - \lambda \leq f_q$$

On peut apporter une flexibilité supplémentaire, en rendant l'élément structurant B variable avec sa position dans le domaine D ; on l'appelle amibe. A chaque point z est alors attaché un élément structurant B_z et à chaque point x de B_z une adjonction (ζ_x, χ_x) .

Alors $\bigvee_{z \in D} \bigvee_{x \in B_z} \zeta_x f$ et $\bigwedge_{z \in D} \bigwedge_{x \in B_z} \chi_x g$ forment une adjonction.

Cette écriture permet de considérer un élément structurant B_z qui change et adapte sa forme selon sa position z dans le domaine D . On présentera dans un prochain cours la morphologie par amibes.

L'opérateur de masquage

On est souvent amené à travailler à l'intérieur d'un masque binaire Z . Les deux opérateurs suivants :

$$\mu_Z^o f = \left| \begin{array}{l} f \text{ sur le masque } Z \\ o \text{ en dehors de } Z \end{array} \right| \text{ et } \mu_Z^\omega f = \left| \begin{array}{l} f \text{ sur le masque } Z \\ \omega \text{ en dehors de } Z \end{array} \right|$$

forment une adjonction : $\mu_Z^o f < g \Leftrightarrow f < \mu_Z^\omega g$

On peut associer un masque B_z à chaque pixel et obtenir des transformations non locales.

Les deux opérateurs $\left(\bigvee_{z \in D} \mu_{B_z}^o f, \bigwedge_{z \in D} \mu_{B_z}^\omega f \right)$ forment alors une adjonction.

Problème de bord de champ.

En général l'image f n'est connue que dans un champ Z .

L'analyse précédente justifie la pratique usuelle, pour éviter que l'image ne se décolle du bord du champ par érosion, on prolonge f par une valeur infinie en dehors de Z pour les érosions et par une valeur égale à 0 en cas de la dilatation. Grâce aux opérateurs :

$$\mu_Z^0 f = \left| \begin{array}{l} f \text{ sur le masque } Z \\ 0 \text{ en dehors de } Z \end{array} \right| \text{ et } \mu_Z^\omega f = \left| \begin{array}{l} f \text{ sur le masque } Z \\ \omega \text{ en dehors de } Z \end{array} \right|$$

On obtient une nouvelle adjonction $(\mu_Z^0 \alpha \mu_Z^0 f, \mu_Z^\omega \beta \mu_Z^\omega f)$.

La dilatation s'obtient en mettant le bord du champ à 0 avant et après la dilatation. Et on met le bord du champ à ω avant et après l'érosion.

Transformations tenant compte de la perspective

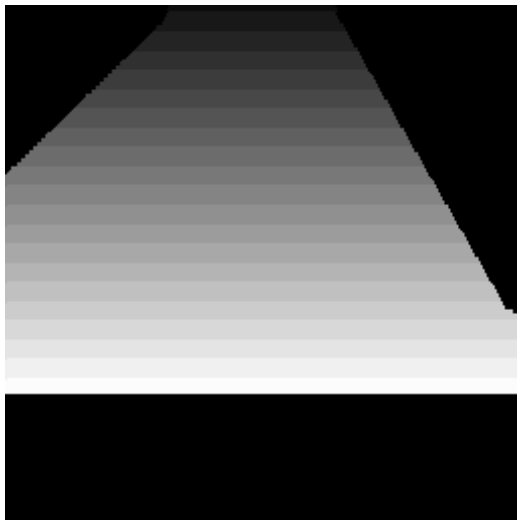
Dans une vue en perspective, les éléments lointains apparaissent plus petits. On a donc intérêt à utiliser des éléments structurants dont la taille s'ajuste en fonction de la profondeur.

De tels éléments ont été utilisés par Serge Beucher dans l'étude de trafic routier, à partir de caméras fixes prenant une voie de circulation en enfilade. On découpe une petite bande centrée sur chaque ligne horizontale et on affecte à cette bande une taille d'éléments structurants.

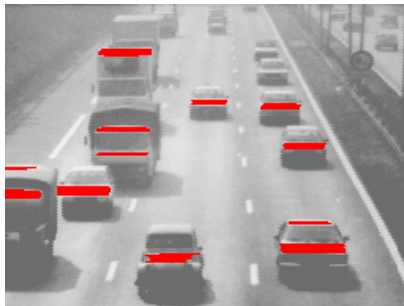
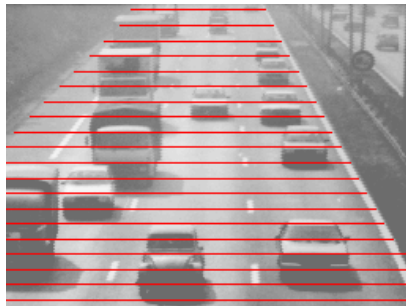
Si Z_i est la bande de profondeur i et (ζ_i, χ_i) l'adjonction correspondante, alors l'adjonction adaptative est:

$$\left(\bigvee_i \mu_{Z_i}^0 \zeta_i \mu_{Z_i}^0, \bigwedge_i \mu_{Z_i}^\infty \chi_i \mu_{Z_i}^\infty \mathbf{g} \right)$$

Transformations tenant compte de la perspective: les divers masques selon la profondeur



Transformations tenant compte de la perspective



On associe à chaque pixel x un voisinage B_x de points qui lui sont "proche". Ces voisinages peuvent se chevaucher et être différents pour chaque pixel.

Si (α, β) forment une adjonction, on peut associer une adjonction à chaque pixel x : $(\mu_{B_x}^0 \alpha \mu_{B_x}^0 f, \mu_{B_x}^\infty \beta \mu_{B_x}^\infty f)$.

On considère alors la famille I de tous les points $(i)_{i \in I}$ dont les voisinage B_i sont semblables. On obtient ainsi une famille ensemble de clusters $C = (I)_{i \in C}$.

A deux pixels quelconques i et j , on associe la translation θ_j^i de i vers j et la translation θ_i^j de j vers i . Ces deux translations forment aussi une adjonction.

Pour $i, j \in I$, $(\theta_j^i \mu_{B_i}^0 \alpha \mu_{B_i}^0 f, \mu_{B_i}^\infty \beta \mu_{B_i}^\infty \theta_i^j f)$ forment une adjonction.

Ainsi, pour $i, j \in I$, $(\theta_i^j \mu_{B_i}^0 \alpha \mu_{B_i}^0 f, \mu_{B_i}^\infty \beta \mu_{B_i}^\infty \theta_j^i f)$ forment une adjonction.

Si λ_I est un poids lié à la similarité des voisinages dans la famille I , $(\theta_i^j \mu_{B_i}^0 \alpha \mu_{B_i}^0 f + \lambda_I, \mu_{B_i}^\infty \beta \mu_{B_i}^\infty \theta_j^i f - \lambda_I)$ formeront encore une adjonction.

On obtient alors une adjonction non locale :

$$\left(\bigvee_{I \in C} \bigvee_{i, j \in I} \theta_i^j \mu_{B_i}^0 \alpha \mu_{B_i}^0 f + \lambda_I, \bigwedge_{I \in C} \bigwedge_{j \in I} \mu_{B_i}^\infty \beta \mu_{B_i}^\infty \theta_j^i f - \lambda_I \right)$$

Références : On Nonlocal Mathematical Morphology ; Santiago Velasco-Forero et Jesus Angulo

Erosions et dilatations qui commutent avec les anamorphoses

Reconstruction d'une fonction à partir de ses seuils

Nous considérons ici des fonctions définies sur un domaine D et prenant leur valeur dans un intervalle continu ou discret $[0, \Omega]$.

On définit deux types de seuils au niveau h de la fonction f :

$$\chi_h = \{x \in E, f(x) \geq h\}$$

$$\eta_h = \{x \in E, f(x) > h\}$$

Toute fonction peut être reconstruite à partir de ses seuils successifs:

$$f = \bigvee_h h \chi_h(f)$$

Opérateurs commutant avec les anamorphoses

Soit X un ensemble binaire, 1_X sa fonction indicatrice et λ une constante. L'opérateur α commute avec les anamorphoses si $\alpha(\lambda 1_X) = \lambda \alpha(1_X)$. Nous écrirons, pour l'opérateur α appliqué aux fonctions : $\alpha X = \alpha(1_X)$, c'est à dire l'opérateur α appliqué à l'ensemble binaire X . Nous écrirons, pour la constante λ , λX pour $\lambda 1_X$. Ainsi l'opérateur α commute avec les anamorphoses si $\alpha(\lambda X) = \lambda \alpha X$

Toute dilatation α commute avec le supremum. Ainsi

$$\alpha f = \alpha \bigvee_h h \chi_h(f) = \bigvee_h \alpha [h \chi_h(f)]$$

Si de plus la dilatation est plane, c'est à dire commute avec les anamorphoses, on obtient : $\alpha f = \bigvee_h h \alpha \chi_h(f)$ et on retrouve le résultat bien connu que le seuil du dilaté est égal au dilaté du seuil.

Construisons l'érosion adjointe de la dilatation $\alpha f = \bigvee_h h \alpha \chi_h(f)$:

$$\begin{aligned} \bigvee_h h \alpha \chi_h(f) < g &\Leftrightarrow \forall h : h \alpha \chi_h(f) < g \Leftrightarrow \forall h : h \alpha \chi_h(f) < h \chi_h(g) \Leftrightarrow \\ \forall h : \alpha \chi_h(f) < \chi_h(g) &\Leftrightarrow \forall h : \chi_h(f) < \beta \chi_h(g) \\ \Leftrightarrow C : h \chi_h(f) < h \beta \chi_h(g) &\Leftrightarrow f = \bigvee_h h \chi_h(f) < \bigvee_h h \beta \chi_h(g) = \beta g \end{aligned}$$

Ainsi, l'érosion β commute aussi avec les anamorphoses.

Inf-reconstruction d'une fonction

Il existe une représentation de l'érosion sous forme d'infimum :

$$f = \bigwedge_{h \geq 0} [\omega \eta_h(f) \vee h], \text{ qui pour les fonctions à valeur dans } [1, \omega] \text{ devient}$$
$$\bigwedge_{h \geq 0} [\omega \chi_{h+1}(f) \vee h]$$

Proof.

(en continu) : $\omega \eta_h(f) \vee h = \omega \eta_h(f) \vee h \chi_h(f) \vee \overline{h \chi_h(f)}$

(en discret) : $\omega \eta_h(f) \vee h = \omega \chi_{h+1}(f) \vee h \chi_h(f) \vee \overline{h \chi_h(f)}$

On remarque que $\omega \eta_h(f) \vee h \geq f$ et $\omega \eta_h(f) \vee h = f$ sur $\{f = h\}$

Ainsi $\bigwedge_{h \geq 0} [\omega \eta_h(f) \vee h] = f$ (en continu) et

$$\bigwedge_{h \geq 0} [\omega \chi_{h+1}(f) \vee h] = \bigwedge_{h \geq 1} [\omega \chi_h(f) \vee (h - 1)] = f \text{ (en discret)}$$



Inf décomposition d'une érosion qui commute avec les anamorphoses.

$$\beta f = \beta \bigwedge_{h>1} [\omega \chi_h(f) \vee (h-1)] = \bigwedge_{h>1} \beta [\omega \chi_h(f) \vee (h-1)] = \bigwedge_{h>1} [\omega \beta \chi_h(f) \vee (h-1)]$$

Proof.

Les seuils successifs de la fonction $\omega \chi_h(f) \vee (h-1)$ sont le domaine D tout entier au niveau $h-1$ et $\chi_h(f)$ pour tous les niveaux supérieurs. L'opérateur β commute avec les anamorphoses. L'érodé d'une fonction s'obtient par érosion de tous ses seuils, c'est à dire $\beta \chi_h(f)$ pour les niveaux supérieurs ou égaux à h . Par ailleurs, si α est la dilatation adjointe de β , on a : $\forall X : \alpha X \subset D \Leftrightarrow \forall X : X \subset \beta D$, ce qui montre que $\beta D = D$. Ainsi $\beta [\omega \chi_h(f) \vee (h-1)] = \omega \beta \chi_h(f) \vee (h-1)$. □

Décomposition de l'érosion et de la dilatation

Pour $h, x \in \mathcal{D}$ et $t \in \mathcal{T}$, on définit la fonction up-pulse

$$\uparrow_h^t(x) = \begin{cases} t & \text{si } x = h \\ 0 & \text{si } x \neq h \end{cases}$$

et la fonction down-pulse $\downarrow_h^t(x) = \begin{cases} t & \text{si } x = h \\ \omega & \text{si } x \neq h \end{cases}$

Toute image f de $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ peut s'écrire $f = \bigvee_{x \in \mathcal{D}} \uparrow_x^{f(x)} = \bigwedge_{x \in \mathcal{D}} \downarrow_x^{f(x)}$

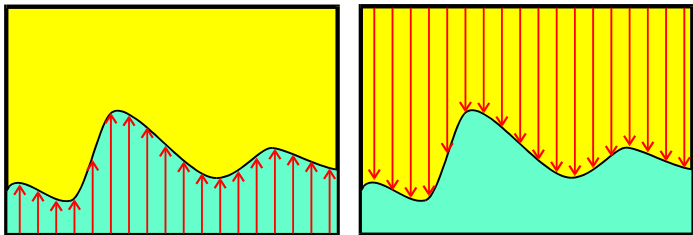


Figure: $f = \bigvee_{x \in \mathcal{D}} \uparrow_x^{f(x)} = \bigwedge_{x \in \mathcal{D}} \downarrow_x^{f(x)}$

Définissons, pour $x \in \mathcal{D}$, $y \in \mathcal{E}$, $t, s \in \mathcal{T}$ l'application

$$\alpha_{x,y}(t) = \alpha(\uparrow_x^t)(y) \text{ et } \beta_{y,x}(s) = \beta(\downarrow_y^s)(x)$$

$\alpha_{x,y}$ est une dilatation sur \mathcal{T} et $\beta_{y,x}$ est une érosion sur \mathcal{T}

Décomposition de la dilatation et de l'érosion

Soit $g \in \text{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{T})$ et $f \in \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{T})$

Appliquons α à $f = \bigvee_{x \in \mathcal{D}} \uparrow_x^{f(x)}$ nous obtenons :

$$\alpha f(y) = \alpha \left(\bigvee_{x \in \mathcal{D}} \uparrow_x^{f(x)} \right) (y) = \bigvee_{x \in \mathcal{D}} \alpha \left(\uparrow_x^{f(x)} \right) (y) = \bigvee_{x \in \mathcal{D}} \alpha_{x,y} (f(x)) ,$$

produisant une sup-décomposition de la dilatation α .

Appliquons β à $g = \bigwedge_{y \in \mathcal{E}} \downarrow_y^{g(y)}$ nous obtenons :

$$\beta g(x) = \beta \left(\bigwedge_{y \in \mathcal{E}} \downarrow_y^{g(y)} \right) (x) = \bigwedge_{y \in \mathcal{E}} \beta \left(\downarrow_y^{g(y)} \right) (x) = \bigwedge_{y \in \mathcal{E}} \beta_{y,x} (g(y)) ,$$

produisant une inf-décomposition de l'érosion β .

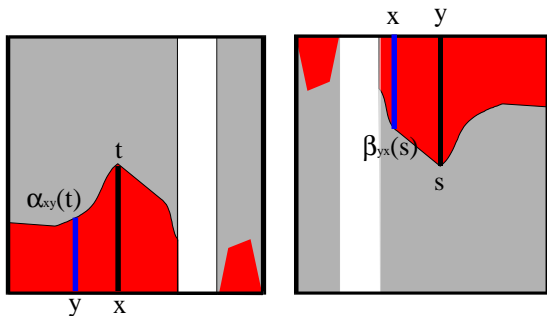


Figure: $\alpha_{x,y}(t) = \alpha(\uparrow_x^t)(y)$ et $\beta_{y,x}(s) = \beta(\downarrow_y^s)(x)$

Théorème : Soit \mathcal{T} un treillis complet, et \mathcal{D}, \mathcal{E} des ensembles quelconques. La paire (α, β) forme une adjonction entre $\text{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{T})$ et $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $y \in \mathcal{E}$, $g \in \text{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{T})$ et $f \in \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ il existe une adjonction $(\alpha_{xy}, \beta_{yx})$ sur \mathcal{T} telle que

$$\alpha f(y) = \bigvee_{x \in \mathcal{D}} \alpha_{xy}(f(x)) \text{ et } \beta g(x) = \bigwedge_{y \in \mathcal{E}} \beta_{yx}(g(y))$$

De plus $\alpha_{x,y}(t) = \alpha(\uparrow_x^t)(y)$ et $\beta_{y,x}(s) = \beta(\downarrow_y^s)(x)$ pour $t \in \mathcal{T}$

Preuve :

1) Montrons (α, β) forme une adjonction $\Rightarrow (\alpha_{xy}, \beta_{yx})$ forme une adjonction:

$$\begin{aligned} \alpha_{xy}(t) < s &\Leftrightarrow \alpha(\uparrow_x^t)(y) < s \Leftrightarrow \alpha(\uparrow_x^t)(y) < \downarrow_y^s(y) \Leftrightarrow \alpha(\uparrow_x^t) < \downarrow_y^s \text{ (puisque} \\ &\downarrow_y^s = \omega \text{ en-dehors de } y) \Leftrightarrow \uparrow_x^t < \beta(\downarrow_y^s) \text{ (par adjonction entre } \alpha \text{ et } \beta) \\ &\Leftrightarrow (\uparrow_x^t)(x) < \beta(\downarrow_y^s)(x) \Leftrightarrow t < \beta_{yx}(s) \end{aligned}$$

2) Montrons $(\alpha_{xy}, \beta_{yx})$ forme une adjonction $\Rightarrow (\alpha, \beta)$ forme une adjonction

$$\begin{aligned} \alpha f(y) < g(y) &\Leftrightarrow \bigvee_{x \in \mathcal{D}} \alpha_{xy}(f(x)) < g(y) \Leftrightarrow \alpha_{xy}(f(x)) < g(y) \Leftrightarrow f(x) < \\ \beta_{yx}g(y) &\Leftrightarrow f(x) < \bigwedge_{y \in \mathcal{E}} \beta_{yx}g(y) \Leftrightarrow f(x) < \beta g(x) \end{aligned}$$

Un exemple de morphologie multiplicative

Soit $w_{xy} \in \mathcal{T}$ une fonction de x et y . Alors

$$\alpha_{xy}(t) = \begin{cases} w_{xy} t & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont voisins} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{définit une dilatation sur } \mathcal{T}$$
$$\beta_{yx}(s) = \begin{cases} \frac{s}{w_{xy}} & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont voisins} \\ \omega & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{est son érosion duale :}$$

Pour x et y voisins $\alpha_{xy}(t) < s \Leftrightarrow w_{xy} t < s \Leftrightarrow t < \frac{s}{w_{xy}} \Leftrightarrow t < \beta_{yx}(s)$

Ainsi $\alpha f(y) = \bigvee_{x \text{ voisins de } y} w_{xy} f(x)$ et $\beta g(x) = \bigwedge_{y \text{ voisin de } x} \frac{f(y)}{w_{xy}}$ constituent une adjonction.

Questions ?